Graphentheorie

9. Serie

Abgabe bis 18. Juni 2021, 10 Uhr

Übungsgruppe 10-12 Uhr: `https://bit.ly/3gddk2o`
Übungsgruppe 12-14 Uhr: `https://bit.ly/3gqqx6W`
Moodle-Link für die schriftliche Abgabe

Aufgabe 1 [1 Punkt]
Bestimme $\mathrm{ex}(n, M_2)$ für die Paarung M_2 der Größe 2. Stelle eine Vermutung für $\mathrm{ex}(n, M_k)$ für Paarungen mit k Kanten auf und beweise die untere Schranke.

Aufgabe 2 [1 Punkt]
Zeige, dass die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ von *dünnen* Graphen unbeschränkt ist, d. h. für jede Folge von Graphen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|V(G_n)| = n$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E(G_n)|}{n^2} = 0$$

gilt $\alpha(G_n) \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$.

Aufgabe 3 [1 Punkt]
Zeige, dass die Extremalzahl von Bäumen linear wächst, d. h. finde eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{ex}(n, T) \leqslant f(|V(T)|) \cdot n$ für jeden Baum T gilt.

Aufgabe 4 [1 Punkt]
Für eine unendliche Folge von Graphen $\mathscr{G} = (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|V(G_n)| = n$ sei die *obere Teilgraphendichte* $\varrho(\mathscr{G})$ durch

$$\varrho(\mathscr{G}) = \limsup_{m\longrightarrow\infty} \max_{H} \left\{ d(H) = \tfrac{2\,|E(H)|}{m^2} \colon V(H) = m \text{ und } H \subseteq G_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \right\}$$

definiert. Zeige $\varrho(\mathscr{G}) \in \{\frac{k-2}{k-1} \colon k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2\} \cup \{1\}$ für jede Graphenfolge $\mathscr{G}$.

Aufgabe 5 (für die schriftliche Abgabe)
Bestimme $\mathrm{ex}(\ell n, P_\ell)$ für Wege P_ℓ mit ℓ Kanten.