Fachbereich Mathematik | Universität Hamburg
Dozent: Prof. Mathias Schacht | SoSe 2021
Übung: Dr. Christian Reiher | 28. Mai 2021

Graphentheorie

7. Serie

Abgabe bis 4. Juni 2021, 10 Uhr

Übungsgruppe 10-12 Uhr: https://bit.ly/3bZHzra

Übungsgruppe 12-14 Uhr: https://bit.ly/2RQMAeJ

Moodle-Link für die schriftliche Abgabe

Aufgabe 1 [1 Punkt]

Die *Arborizität* $\operatorname{arb}(G)$ eines Graphen G ist die kleinste natürliche Zahl k, sodass sich die Kanten von G als Vereinigung von k Wäldern darstellen lässt. Beweise oder widerlege, dass es eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt, für die $\chi(G) \leqslant f(\operatorname{arb}(G))$ für jeden Graphen G gilt.

Aufgabe 2 [1 Punkt]

Eine Orientierung eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ der für jede Kante $\{x, y\} \in E$ genau eine der beiden gerichteten Kanten (x, y) bzw. (y, x) in A enthält. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G:

(*i*) $\chi(G) \leqslant k$;

(*ii*) G hat eine Orientierung der Kanten, in der kein gerichteter Weg die Länge k hat;

(*iii*) G hat eine Orientierung wie in (*ii*), in der es auch keine gerichteten Kreise gibt.

Aufgabe 3 [1 Punkt]

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_G(k)$ die Anzahl der möglichen Eckenfärbungen $V \longrightarrow [k]$ von G. Zeige, dass P_G ein Polynom in k vom Grad $n = |V|$ ist, bei dem k^n den Koeffizienten 1 hat und k^{n-1} den Koeffizienten $-|E|$.

Aufgabe 4 [1 Punkt]

Zeige direkt ohne den Satz von Erdős (Satz 4.2.5), dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen k-chromatischen Graphen gibt, der kein Dreieck enthält.

Aufgabe 5 (für die schriftliche Abgabe)

Finde zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_k > 0$, so dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit Unabhängigkeitszahl $\alpha(G) \leqslant k$ und hinreichend vielen Ecken einen Kreis der Länge mindestens $c_k\,|V|$ enthält.