

# Graphentheorie

## 2. Serie

Abgabe bis 23. April 2021, 10 Uhr

Übungsgruppe 10-12 Uhr: <https://bit.ly/3spsjcv>

Übungsgruppe 12-14 Uhr: <https://bit.ly/2Q0roSM>

**Moodle-Link** für die schriftliche Abgabe

---

### Aufgabe 1

[1 Punkt]

In einem fest vorgegebenen Graphen  $G$  konstruieren zwei Spieler gemeinsam schrittweise einen Weg. Ist nach  $n$  Spielzügen ein Weg  $v_1 \dots v_n$  entstanden, so wählt der am Zug befindliche Spieler eine Ecke  $v_{n+1}$ , so dass  $v_1 \dots v_{n+1}$  wiederum ein Weg ist. Kann ein Spieler nicht mehr ziehen, so verliert er. Für welche Graphen  $G$  hat der erste Spieler eine Gewinnstrategie, für welche der zweite?

### Aufgabe 2

[1 Punkt]

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  sei  $\nu(G)$  die Mächtigkeit einer größten Paarung in  $G$  und  $M \subseteq E$  sei eine maximale Paarung in  $G$ . Finde eine geeignete obere Schranke von  $\nu(G)$  als Funktion von  $|M|$ . Ist die gefundene Formel bestmöglich?

### Aufgabe 3

[1 Punkt]

Beweise den Satz von Hall mit dem Satz von König.

### Aufgabe 4

[1 Punkt]

Es sei  $G = (X \cup Y, E)$  ein bipartiter Graph. Es gelte  $\delta(G) \geq 1$ , sowie  $d(x) \geq d(y)$  für jede Kante  $xy \in E$  mit  $x \in X$ . Zeige, dass  $G$  eine  $X$  überdeckende Paarung enthält.

---

### Aufgabe 5 (für die schriftliche Abgabe)

Beweise den folgenden *Satz von Sperner* mithilfe des Satzes von Hall: in einer  $n$ -elementigen Menge  $X$  gibt es höchstens  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  einander paarweise nicht enthaltende Teilmengen.