Fachbereich Mathematik | SoSe 2016
Dozent: Prof. Mathias Schacht | 23. Mai 2016
Übung: Jakob Schnitzer

Graphentheorie

7. Serie

Besprechung am 30. Mai 2016

http://bit.ly/1U6VPuL

Aufgabe 1
Leite die chromatische Zahl eines Graphen aus den chromatischen Zahlen seiner Blöcke her.

Aufgabe 2
Zeige, dass jeder Graph G eine Eckenaufzählung hat, mit der der Greedy-Algorithmus nur $\chi(G)$ Farben benötigt.

Aufgabe 3
Ein k-chromatischer Graph G heißt *kritisch* k-chromatisch, wenn $G - v$ für jede Ecke $v \in V(G)$ mit weniger als k Farben färbbar ist. Zeige, dass jeder k-chromatische Graph einen kritisch k-chromatischen Untergraphen hat, und dass der Minimalgrad jedes solchen Untergraphen mindestens $k - 1$ beträgt.

Aufgabe 4 [1 Punkt]
Finde zu jedem $n > 1$ einen bipartiten Graphen mit $2n$ Ecken, für den der Greedy-Algorithmus bei (un)geeigneter Eckenaufzählung n Farben benötigt.

Aufgabe 5 [1 Punkt]
Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_G(k)$ die Anzahl der möglichen Eckenfärbungen $V \to \{1, \ldots, k\}$ von G. Zeige, dass P_G ein Polynom in k vom Grad $n = |V|$ ist, bei dem k^n den Koeffizienten 1 hat und k^{n-1} den Koeffizienten $-|E|$

Aufgabe 6 [2 Punkte]
Finde zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_k > 0$, so dass jeder Graph G mit Unabhängigkeitszahl $\alpha(G) \leqslant k$ und hinreichend vielen Ecken einen Kreis der Länge mindestens $c_k\,|V(G)|$ enthält.

Aufgabe 7 (für die schriftliche Abgabe)
Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G :

(i) $\chi(G) \leqslant k$;
(ii) G hat eine Orientierung der Kanten, in der kein gerichteter Weg die Länge k hat;
(iii) G hat eine Orientierung wie in (ii), in der es auch keine gerichteten Kreise gibt.