Fachbereich Mathematik
Dozent: Prof. Mathias Schacht
Übung: Jakob Schnitzer

SoSe 2016
12. Mai 2016

Graphentheorie

6. Serie

Besprechung am 23. Mai 2016

http://bit.ly/24NzytN

Aufgabe 1
Wieviele Ecken vom Grad höchstens fünf hat jeder plättbare Graph mit mindestens 100 Ecken.

Aufgabe 2
Wie ebene Graphen in den $\mathbb{R}^2$ (bzw. in die Kugeloberfläche) einbettbar sind, kann man Graphen dadurch definieren, dass sie in Flächen mit höherem Geschlecht einbettbar sind. Zeige, dass der K_5 in den Torus einbettbar ist. Können K_6 und K_7 auch in den Torus eingebettet werden?

Aufgabe 3
Zeige, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|E| \geqslant |V| + 4$ zwei kantendisjunkte Kreise enthält.

Aufgabe 4 [1 Punkt]
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph in dem alle Ecken geraden Grad haben. Zeige, dass für jedes $v \in V$ die Anzahl der Komponenten in $G - v$ höchstens $d_G(v)/2$ ist.

Aufgabe 5 [1 Punkt]
Ein *Turnier* $T = (V, A)$ ist ein gerichteter Graph in dem jedes Eckenpaar genau eine Richtung hat, d. h. für alle x, $y \in V$ mit $x \neq y$ ist entweder $(x, y) \in A$ oder $(y, x) \in A$ (aber nicht beide). Zeige, dass es in jedem Turnier einen gerichteten Weg gibt, der alle Ecken enthält.

Aufgabe 6 [1 Punkt]
Eine Kante e in einem Graphen G heißt *Sehne des Kreises* $C \subseteq G$, falls die Endecken von e auf C liegen, aber e nicht in C liegt. Zeige, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|E| \geqslant 2|V| - 3$ und $|V| \geqslant 4$ einen Kreis mit einer Sehne enthält.

Aufgabe 7 (Nr. 10 in §2) [2 Punkte]
Zeige, dass für jede Kante e eines 3-zusammenhängenden Graphen $G \neq K_4$ einer der Graphen $G \dot{-} e$ oder G/e wiederum 3-zusammenhängend ist.

Aufgabe 8 (für die schriftliche Abgabe)
Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ heißt *azyklisch*, wenn er keinen gerichteten Kreis enthält. Insbesondere enthält ein solcher Graph keine gerichteten Schlingen und keine zwei Ecken x, $y \in V$, so dass $(x, y) \in A$ und $(y, x) \in A$, da dies gerichteten Kreisen der Länge eins oder zwei entspräche. Zeige, dass ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ genau dann azyklisch ist, wenn es eine Aufzählung der Eckenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ gibt, so dass $\{i \in \{1, \dots, j\} : (v_i, v_j) \in A\} = \varnothing$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt.