Graphentheorie

2. Serie

Besprechung am 18. April 2016

http://bit.ly/25PbLv5

Aufgabe 1
Zeige, dass jeder geschlossene Kantenzug ungerader Länge einen Kreis enthält. Gibt es eine ähnliche Variante für geschlossene Kantenzüge gerader Länge?

Aufgabe 2 (Nr. 12 in §0)
Bestimme $\kappa(\cdot)$ und $\lambda(\cdot)$ für den Weg P_n, den Kreis C_n, die Clique K_n, den vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$ und den n-dimensionalen Würfel Q_n (den Graphen mit Eckenmenge $\{0,1\}^n$ und Kanten zwischen Ecken, die sich in genau einer Koordinate unterscheiden) für m, $n \geqslant 3$.

Aufgabe 3
Geht im Beweis des Heiratssatzes die Annahme ein, dass der betrachtete Graph endlich ist? Wenn ja, kann man den Beweis so ändern, dass er auch für unendliche Graphen gilt?

Aufgabe 4 (Nr. 23 in §0) [1 Punkt]
Es sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilbäumen eines Baumes T und $k \in \mathbb{N}$.

(i) Zeige, dass wenn je zwei Bäume aus $\mathcal{T}$ einen nicht leeren Schnitt haben, dann ist auch der Schnitt aller Bäume $\bigcap_{T\in\mathcal{T}} T$ nicht leer.

(ii) Zeige, dass es entweder k disjunkte Bäume in $\mathcal{T}$ gibt oder eine Menge von höchstens $k-1$ Ecken von T alle Bäume aus $\mathcal{T}$ trifft.

Aufgabe 5 (Nr. 24 in §0) [1 Punkt]
Zeige, dass jeder Automorphismus eines Baumes eine Ecke oder eine Kante festlässt.

Aufgabe 6 (Nr. 41 in §0) [1 Punkt]
Sei $A = (a_{ij})_{n\times n}$ die Adjazenzmatrix des Graphen G mit Eckenmenge $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, d. h.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \{v_i, v_j\} \notin E(G), \\ 1, & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E(G). \end{cases}$$

Zeige, dass die Matrix $A^k = (a'_{ij})_{n\times n}$ die Anzahlen a'_{ij} der Kantenzüge der Länge k von v_i nach v_j in G angibt.

Aufgabe 7 (Nr. 5 in §1) [2 Punkte]

Beweise den Heiratssatz mit dem Satz von König.

Aufgabe 8 (für die schriftliche Abgabe, Nr. 4 in §1)

In einem fest vorgegebenen Graphen G konstruieren zwei Spieler gemeinsam schrittweise einen Weg. Ist nach n Spielzügen ein Weg $v_1, \ldots, v_n$ entstanden, so wählt der am Zug befindliche Spieler eine Ecke v_{n+1}, so dass $v_1, \ldots, v_{n+1}$ wiederum ein Weg ist. Kann ein Spieler nicht mehr ziehen, so verliert er. Für welche Graphen G hat der erste Spieler eine Gewinnstrategie, für welche der zweite?