Fachbereich Mathematik
Dozent: Prof. Mathias Schacht
Übung: Jakob Schnitzer

SoSe 2016
27. Juni 2016

Graphentheorie

12. Serie

Besprechung am 4. Juli 2016

http://bit.ly/28WPPpk

Aufgabe 1
Seien $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ Grapheneigenschaften und $0 \leqslant p = p(n) \leqslant 1$, so dass für jedes $i \in [k]$ asymptotisch fast sicher $G(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_i$ hat. Zeige, dass asymptotisch fast sicher $G(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_k$ hat.

Aufgabe 2 (Nr. 1 & 2 in §9)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsgraph aus $G(n,p)$ genau m Kanten hat, für gegebenes m zwischen 0 und $\binom{n}{2}$? Wie groß ist die mittlere Kantenzahl $\mathbb{E}[|E(G(n,p))|]$?

Aufgabe 3
Es sei H ein Graph auf k Ecken, und h bezeichne die Anzahl der zu H isomorphen Graphen auf einer festen Menge von k Elementen. Zeige, dass stets $h \leqslant k!$ gilt. Für welche Graphen H gilt hier Gleichheit?

Aufgabe 4 (Nr. 4 in §9) [1 Punkt]
Für welche Graphen H existiert eine Konstante $c = c(H)$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph mit Durchschnittsgrad $\geqslant c$ ein Exemplar von H als Teilgraphen enthält?

Aufgabe 5 (Nr. 8 in §9) [1 Punkt]
Zeige, dass für $p \in (0,1)$ asymptotisch fast sicher $G(n,p)$ keinen trennenden vollständigen Untergraphen hat.

Aufgabe 6 [1 Punkt]
Zeige, dass für $p \in (0,1]$ asymptotisch fast sicher $G(2n,p)$ ein perfektes Matching hat? Finde eine möglichst kleine Funktion $p = p(n) = o(1)$, so dass $G(2n,p)$ asymptotisch fast sicher ein perfektes Matching hat.

Aufgabe 7 (Nr. 14 in §8) [2 Punkte]
Zeige, dass jede Kante eines Graphen G auf einer geraden Anzahl von Hamiltonkreisen liegt, wenn alle Ecken von G ungeraden Grad haben.

Aufgabe 8 (für die schriftliche Abgabe)
Zeige, dass für festes $p \in (0,1]$ der $G(n,p)$ asymptotisch fast sicher Durchmesser $\leqslant 2$ hat. Finde eine möglichst kleine Funktion $p = p(n) = o(1)$, so dass $G(n,p)$ asymptotisch fast sicher Durchmesser 2 hat.