FACHBEREICH MATHEMATIK | SOSE 2016
DOZENT: PROF. MATHIAS SCHACHT | 13. JUNI 2016
ÜBUNG: JAKOB SCHNITZER

Graphentheorie

10. Serie

Besprechung am 20. Juni 2016

http://bit.ly/1tr6cEy

Aufgabe 1 (Nr. 2 in §7)
Beweise den Fall $k = 2$ (aber c beliebig) von Satz 7.1.4 durch bloße Anwendung von Satz 7.1.1.

Aufgabe 2 (Nr. 4 in §7)
Verbessere die obere Schranke für die Ramseyzahl $R(n)$ eingeschränkt für perfekte Graphen?

Aufgabe 3 (Nr. 9 in §7)
Beweise den folgenden Satz von Schur: zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in k Teilmengen in mindestens einer dieser Teilmengen Zahlen x, y und z mit $x + y = z$ existieren.

Aufgabe 4 (Nr. 8 in §7) [1 Punkt]
Beweise den folgenden Satzes von Erdős und Szekeres: zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass aus n Punkten der Ebene, von denen keine drei kollinear sind, stets k Punkte auswählbar sind, die ein konvexes Polygon aufspannen (d.h. von denen keiner in der konvexen Hülle der übrigen liegt).

Aufgabe 5 (Nr. 11 in §7) [1 Punkt]
Eine Mengenfamilie heißt ein Δ-System, wenn je zwei dieser Mengen den gleichen Durchschnitt haben. Zeige, dass jede unendliche Familie von Mengen gleicher endlicher Kardinalität ein unendliches Δ-System enthält.

Aufgabe 6 (Nr. 13 in §7) [1 Punkt]
Es seien m, $n \in \mathbb{N}$, und $m - 1$ sei ein Teiler von $n - 1$. Zeige, dass für jeden Baum T mit m Ecken gilt $R(T, K_{1,n}) = m + n - 1$, d. h. für jeden Graphen auf $m + n - 1$ Ecken gilt $T \subseteq G$ oder $K_{1,n} \subseteq \overline{G}$ und $m + n - 1$ ist minimal mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 7 (Nr. 7 in §7) [2 Punkte]
Zeige mit dem Satz von Ramsey, dass es zu k, $\ell \in \mathbb{N}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jede Folge von n verschiedenen ganzen Zahlen eine aufsteigende Teilfolge der Länge $k + 1$ oder eine absteigende Teilfolge der Länge $\ell + 1$ enthält. Finde ein Beispiel, das $n > k\ell$ zeigt. Beweise dann direkt, dass $n > k\ell$ auch ausreicht.

Aufgabe 8 (für die schriftliche Abgabe, Nr. 12 in §7)
Zeige mit Hilfe des Unendlichkeitslemmas, dass ein abzählbar unendlicher Graph mit $k \in \mathbb{N}$ Farben eckenfärbbar ist, wenn all seine endlichen Teilgraphen es sind.