Fachbereich Mathematik — SS 2013
Dozent: Prof. Mathias Schacht — 13. Juni 2013
Übung: Jun.-Prof. Christian Reiher

Graphentheorie

9. Serie

Besprechung am 20. Juni 2013

Aufgabe 1 (D-De, §6, Nr. 4) [1 Punkt]
Bestimme $\mathbf{ex}(n, K_{1,r})$ für alle n, $r \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (D-De, §6, Nr. 9)
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(*a*) Für jedes $C > 0$ enthält jeder hinreichend große Graph $G = (V, E)$ mit $|E| \leq C|V|$ eine unabhängige Menge der Größe 100.

(*b*) Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält jeder hinreichend große Graph $G = (V, E)$ mit $|E| \leq |V|^{2-\varepsilon}$ eine unabhängige Menge der Größe 10^{10}.

Aufgabe 3 (D-De, §6, Nr. 13) [1 Punkt]
Die *obere Kantendichte* $\bar{\varepsilon}(G)$ eines unendlichen Graphen $G = (V, E)$ ist der limes superior der maximalen Kantendichten seiner endlichen Teilgraphen, d. h.

$$\bar{\varepsilon}(G) = \limsup_{n\to\infty} \max_{U \in \binom{V}{n}} \varepsilon(G[U])\,.$$

(*i*) Zeige, dass jeder unendliche Graph G mit $\bar{\varepsilon}(G) > \frac{r-2}{r-1}$ jeden endlichen r-partiten Graphen als Teilgraphen enthält.

(*ii*) Folgere, dass $\bar{\varepsilon}(G) \in \{1 - 1/k\colon\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ für jeden unendlichen Graphen gilt.

Aufgabe 4 (D-De, §6, Nr. 18) [1 Punkt]
Kann hoher Durchschnittsgrad eine hohe chromatische Zahl erzwingen, wenn wir einen Baum als Untergraphen verbieten? Genauer: Für welche Bäume T gibt es eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $f(k)$, der T nicht als Untergraphen enthält, eine chromatische Zahl von mindestens k hat?

Aufgabe 5 (D-De, §6, Nr. 26^-)
Leite den Vierfarbensatz aus der Hadwiger-Vermutung für $r = 5$ her.

Aufgabe 6 (D-De, §6, Nr. 34) [2 Punkte]
Beweise die Hadwiger-Vermutung für Kantengraphen.