Fachbereich Mathematik SS 2013
Dozent: Prof. Mathias Schacht 30. Mai 2013
Übung: Jun.-Prof. Christian Reiher

Graphentheorie

7. Serie

Besprechung am 6. Juni 2013

Aufgabe 1 (D-De, §4, Nr. 17) [2 Punkte]

Zeige die Gleichwertigkeit der folgenden Aussagen über Graphen G:

(*i*) $\chi(G) \leq k$;

(*ii*) G hat eine Orientierung (der Kanten), in der kein gerichteter Weg die Länge k hat;

(*iii*) G hat eine Orientierung wie in (ii), in der es auch keine gerichteten Kreise gibt.

Aufgabe 2 (D-De, §4, Nr. 18) [1 Punkt]

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_G(k)$ die Anzahl der möglichen Eckenfärbungen $V \to \{1, \ldots, k\}$ von G. Zeige, dass P_G ein Polynom in k vom Grad $n := |V|$ ist, bei dem k^n den Koeffizienten 1 hat und k^{n-1} den Koeffizienten $-|E(G)|$. (Man nennt P_G das *chromatische Polynom* von G).

Aufgabe 3 (D-De, §4, Nr. 19) [2 Punkte]

Bestimme die Klasse aller Graphen $G = (V, E)$ mit $P_G(k) = k\,(k-1)^{|V|-1}$, wobei P_G das chromatische Polynom von G bezeichnet.

Aufgabe 4 (D-De, §4, Nr. 19)

Eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\{1, \ldots, n\}$ heißt *Lateinisches Quadrat*, wenn jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ in jeder Spalte und jeder Zeile genau einmal auftritt. Führe die Konstruktion Lateinischer Quadrate auf ein Färbungsproblem zurück.

Aufgabe 5 (D-De, §4, Nr. 22)

Zeige ohne Proposition 4.3.1, dass $\chi'(G) = k$ gilt für jeden k-regulären bipartiten Graphen G.

Aufgabe 6 (D-De, §4, Nr. 23) [1 Punkt]

Beweise Proposition 4.3.1 mit der Aussage der vorigen Übungsaufgabe.