Fachbereich Mathematik — SS 2013
Dozent: Prof. Mathias Schacht — 20. Juni 2013
Übung: Jun.-Prof. Christian Reiher

Graphentheorie

10. Serie

Besprechung am 27. Juni 2013

Aufgabe 1 (D-De, §7, Nr. 3)

Eine *arithmetische Progression* (oder *arithmetische Folge*) in den natürlichen Zahlen ist eine Zahlenfolge der Form $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$ mit $a,\ d \in \mathbb{N}$. Nach einem Satz von van der Waerden enthält bei jeder Partition der natürlichen Zahlen in endlich viele Klassen eine Klasse eine beliebig lange arithmetische Progression. Gibt es sogar immer eine unendliche arithmetische Progression in einer der Klassen?

Aufgabe 2 (D-De, §7, Nr. 4)

Ein Graph G heißt *perfekt* falls $\chi(H) = \omega(H)$ für jeden induzierten Teilgraphen H von G gilt. Mit Blick auf die Formulierung des Satzes von Ramsey für Graphen mit zwei Farben wie in Satz 7.1.1 verbessern Sie die numerische Abhängigkeit von n als eine Funktion von r, für den Fall das man sich bei dem Satz auf perfekte Graphen G einschränkt?

Aufgabe 3 (D-De, §7, Nr. 8) [2 Punkte]

Beweisen Sie, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass aus n_k Punkten in der Ebene, von denen keine drei kollinear sind, stets k Punkte auswählbar sind, die ein konvexes Polygon aufspannen (d.h. von denen keiner in der konvexen Hülle der übrigen liegt).

Tipp: In einem möglichen Beweis zeigt man zuerst $n_4 = 5$ und benutzt dann Ramseys Satz für Hypergraphen für den allgemeinen Fall.

Aufgabe 4 (D-De, §7, Nr. 9) [1 Punkt]

Beweise den folgenden Satz: zu jedem $c \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede Partition von $[n]$ in c Teilmengen in mindestens einer dieser Teilmengen Zahlen x, y und z mit $x + y = z$ existieren.

Aufgabe 5 (D-De, §7, Nr. 10) [1 Punkt]

Es sei $(X, \leq)$ eine vollständig geordnete Menge, und $G = (V, E)$ der Graph auf $V := \binom{X}{2}$ mit $E := \big\{\{(x, y), (x', y')\} \colon\ x < y = x' < y'\big\}$.

(*i*) Zeige, dass G kein Dreieck enthält.

(*ii*) Zeige, dass $\chi(G)$ beliebig groß wird, wenn nur $|X|$ groß genug ist.

Aufgabe 6 (D-De, §7, Nr. 11) [2 Punkte]

Eine Mengenfamilie heißt ein Δ-System, wenn je zwei dieser Mengen den gleichen Durchschnitt haben.

(a) Zeige, dass jede unendliche Familie von Mengen gleicher endlicher Kardinalität ein unendliches Δ-System enthält.

(b) Formulieren und beweisen Sie eine endliche Version dieser Aussage. Geben Sie ein möglichst gute Schranke für die Größe der Familie an, um ein Δ-system der Größe m zu garantieren.