9 Grenzwerte von Funktionen

Den Begriff der *Funktion* oder *Abbildung* haben wir bereits im ersten Semester kennengelernt. Ab jetzt wollen wir *reelle* Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$ näher untersuchen. Da $D(f)$ häufig ein Intervall ist, soll dieser Begriff zunächst „offiziell“ eingeführt werden.

Def 9.1 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Mengen

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, &]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, &]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \end{aligned}$$

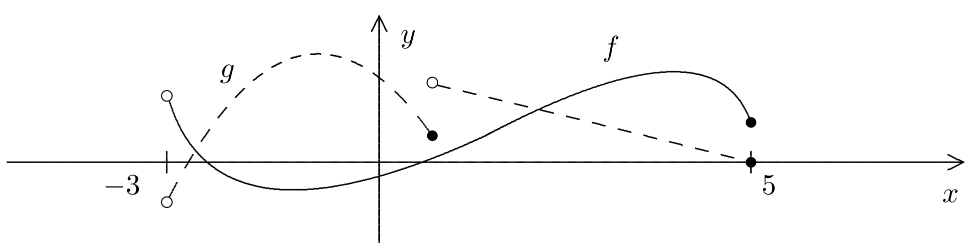
heißen *endliche Intervalle*; $[a,b]$ heißt *abgeschlossenes Intervall*, $]a,b[$ heißt *offenes Intervall*, $[a,b[$ und $]a,b]$ heißen *halboffene Intervalle*.

Lässt man für a oder b auch $-\infty$ oder ∞ zu, erhält man *unendliche* Intervalle, so ist beispielsweise $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$.

Frage: Wie kann man $\mathbb{R}$ als Intervall schreiben?

Zeichnerisch werden wir den *Graph* einer reellen Funktion wie üblich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit x–Achse und y–Achse darstellen.

Beispiel: In der folgenden Skizze ist der Graph zweier Funktionen $f, g : \ ]-3, 5] \to \mathbb{R}$ aufgemalt, die Bedeutung der schwarzen und weißen Kringel wird in der Vorlesung geklärt.



Nicht immer lassen sich Funktionen so einfach skizzieren.

Frage: Wie sieht der Graph der *Dirichletschen Funktion*, benannt nach *P.–G. Dirichlet, 1805–1859*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1$ für rationales x und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ aus?

Bisher haben wir uns um Grenzwerte von reellen Folgen und Reihen gekümmert, d.h., wir haben Grenzwerte der Art $\lim_{n\to\infty} a_n$ betrachtet. Jetzt wollen wir den Grenzwertbegriff auf Funktionen erweitern.

Def 9.2 Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *hat an an der Stelle* $x_0 \in \mathbb{R}$ *den Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$, $:\Longleftrightarrow$

(1) Es gibt eine Folge $(x_n) \to x_0$ mit $x_n \in D \backslash \{x_0\}$

(2) Für jede Folge aus (1) gilt $f(x_n) \to a$

Beispiel: Die Funktion f aus der Zeichnung hat an jeder Stelle $x_0 \in [-3, 5]$ einen Grenzwert, während g an genau einer Stelle des abgeschlossenen Intervalls $[-3, 5]$ keinen Grenzwert besitzt (wo?).

Damit eine Funktion an einer Stelle x_0 einen Grenzwert besitzen kann, muss in jeder ε–Umgebung von x_0 mindestens ein von x_0 verschiedenes Element des Definitionsbereichs der Funktion liegen; man sagt auch mathematisch vornehmer: x_0 muss ein Häufungspunkt von D sein. (Bitte nicht mit Häufungspunkt einer Folge verwechseln!) Keine Rolle spielt, ob die Funktion in x_0 definiert ist und welchen Wert sie dort gegebenenfalls besitzt.

Beispiele: 1) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jede reelle Zahl auf 1 abbildet, hat an jeder Stelle x_0 den Grenzwert 1:
Wegen $f(x_n) = 1 \ \forall x_n \in \mathbb{R}$ folgt für jede Folge $x_n \to x_0$ auch $f(x_n) = 1 \to 1$, und dies ist (zufällig) auch der Wert der Funktion an der Stelle x_0.

2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, also erneut $D(f) = \mathbb{R}$. f hat an der Stelle $x_0 = 2$ den Grenzwert 4; denn es gilt für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f),\ x_n \neq 2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 2 \cdot 2 = 4, \quad \text{also} \ \lim_{x\to 2} f(x) = 4 \,.$$

An der Stelle x_0 hat f den Grenzwert x_0^2; denn es gilt für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f),\ x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = x_0^2, \quad \text{also} \ \lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^2 \,.$$

Zufälligerweise gilt auch hier $f(x_0) = x_0^2$, an jeder Stelle stimmen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $f(x_0)$ überein. Dies ist nicht immer so, wie die nächsten Beispiele zeigen.

3) Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

Frage: Hat f an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert?

Antwort: Sei (x_n) eine beliebige Nullfolge mit $x_n > 0$.[20] Es folgt $f(x_n) \to 1$, da (wegen $x_n \neq 0$) stets $f(x_n) = 1$ gilt. Also hat f an der Stelle $x_0 = 0$ den Grenzwert 1, obwohl $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$ gilt.

4) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Frage: Hat f an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert?

Antwort: Wir betrachten die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Es gilt $x_n \in D(f),\ \ x_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Für die zugehörige Folge $(f(x_n))$ der Funktionswerte gilt

$$f(x_n) = \begin{cases} -1, & \text{falls} \quad n \ \text{ungerade} \\ 1, & \text{falls} \quad n \ \text{gerade} \end{cases}$$

Damit existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht, f hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert, obwohl $f(x_0)$ definiert ist.

5) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Wir untersuchen, ob f an einer Stelle x_0 einen Grenzwert hat.

[20] Die Forderung $x_n > 0$ folgt aus der Vorgabe $x_n \in D \setminus \{0\}$.

1. Fall: $x_0 \neq 0$. Es sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in D(f)$ (d.h. $x_n \neq 0$), und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt nach alten Sätzen:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}, \text{ also } \lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{1}{x_0}\,.$$

2. Fall: $x_0 = 0$. Wir vermuten (zum Beispiel durch Betrachten des zugehörigen Graphen), dass an dieser Stelle kein Grenzwert existiert. Dies beweisen wir, indem wir eine Folge gemäß (1) aus Definition 9.2 angeben, die *nicht* die Eigenschaft (2) dieser Definition erfüllt. Es sei $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$. Da diese Folge gegen 0 konvergiert, aber die Folge $(f(x_n))$ nicht konvergiert (warum nicht?), hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ in der Tat keinen Grenzwert.

Man kann Definition 9.2 auf uneigentliche Konvergenz/Divergenz ausdehnen, hierzu weitere *Beispiele*:

6) Sei $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann gilt für $x \to 0$: $\quad f(x) \to \infty$.

7) Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$. Dann gilt für $x \to \infty$: $\quad f(x) \to 1$.

Frage: Was ist mit $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

Mit den folgenden Funktionen werden wir uns eventuell in den Übungen beschäftigen:

1) Wie verhält sich $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ an $x_0 = 0$?

2) Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. An welchen Stellen hat f einen Grenzwert?

4) Keine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ hat an irgendeiner Stelle einen Grenzwert (warum ?).

Noch einmal zur Erinnerung: Für die Existenz eines Grenzwertes einer Funktion ist es völlig unerheblich, ob die betroffene Stelle zum Definitionsbereich der Funktion gehört oder nicht. Dies wird im nächsten Abschnitt über Stetigkeit anders sein. Wir merken uns schon einmal vorweg: Die Frage, ob eine Funktion an einer Stelle stetig ist oder nicht, stellt sich ausschließlich für Werte des Definitionsbereichs.

10 Stetigkeit: Definition und Beispiele

Kehren wir für einen Augenblick noch einmal zur Grenzwertdefinition 9.2 zurück. Weil dort nur Folgen mit Gliedern verschieden von x_0 betrachtet werden, ist der merkwürdige Fall $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ möglich. Dies können wir ausschließen, indem wir für die zu untersuchenden Folgen grundsätzlich jeden Wert des Definitionsbereichs zulassen. Dies bedeutet natürlich andererseits, dass für jede Stelle des Definitionsbereichs die Bedingung (1) aus Definition 9.2 erfüllt ist, man nehme einfach die konstante Folge (x_0).

In den folgenden Untersuchungen beschäftigen wir uns nur noch mit Grenzwerten von reellen Funktionen *an Stellen des Definitionsbereiches.*

Def 10.1 Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $x_0 \in D(f)$. f heißt *stetig an der Stelle* x_0 $:\Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

f heißt *stetig auf* X (für $X \subseteq D(f)$), falls f an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

Statt *stetig an der Stelle* x_0 sagt man auch kürzer *stetig in* x_0. Ist eine Funktion f in $x_0 \in D(f)$ nicht stetig, nennt man f *unstetig* an der Stelle x_0 und x_0 eine *Unstetigkeitsstelle* von f. Dies bedeutet, dass es mindestens eine Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ und $x_n \to x_0$ gibt, für die die zugehörige Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ entweder überhaupt nicht oder gegen einen Wert verschieden von $f(x_0)$ konvergiert.

In der Schule haben Sie eventuell gelernt, dass eine reelle Funktion genau dann stetig ist, wenn man ihren Graph ohne Unterbrechung zeichnen kann. Dies mag für alle Fälle, die dort behandelt werden, zutreffen, mathematisch exakt ist es aber nicht! Wir werden später Beispiele kennenlernen, die diese Problematik deutlich machen.

Beispiele: 1) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig; denn für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(x_0)\ .$$

2) Die identische Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, da für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0)\ .$$

Die nächsten zwei Beispiele sind bereits im 9. Abschnitt behandelt worden:

3) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

4) Die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

5) Da die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist, ist sie an dieser Stelle weder stetig noch unstetig.

Frage: Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

6) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ hat nur an der Stelle $x_0 = 1$ einen Grenzwert. An dieser Stelle ist sie auch stetig, da $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ und $f(1)$ übereinstimmen.

Wir stellen fest: Es gibt auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen, die nur in genau einem Punkt stetig sind.

Frage: Gibt es reelle Funktionen, die an genau zwei ($3, 4, \ldots n$, abzählbar vielen) Stellen stetig sind?

Wir vergleichen ein letztes Mal die Definitionen 9.2 (Grenzwert einer Funktion) und 10.1 (Stetigkeit) und stellen fest: Im Gegensatz zum Grenzwert
– ist Stetigkeit oder Unstetigkeit ausschließlich an Stellen des Definitionsbereichs möglich
– müssen bei Untersuchungen zur Stetigkeit auch Folgen $(x_n) \to x_0$ mit Folgengliedern $x_n = x_0$ berücksichtigt werden.

Diese Unterschiede führen zu folgendem merkwürdigen Verhalten:

Beispiele: 7) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist überall stetig (denn nur konstante Folgen erfüllen die Voraussetzung $x_n \to x_0$), hat aber an keiner Stelle einen Grenzwert (da es keine Folge $(x_n) \to x_0$ mit $x_n \neq x_0$ gibt).

8) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(0) := 0$ und $g(x) = 1$ sonst hat an der Stelle 0 den Grenzwert 1, ist dort wegen $f(0) = 0$ aber nicht stetig.

Zum Glück werden wir uns im Folgenden nicht weiter mit solchen patologischen Fällen auseinandersetzen. Keine derartigen Probleme gibt es bei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Hier merken wir uns:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist an der Stelle } x_0 \text{ stetig} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Sind f und g reelle Funktionen mit den Definitionsbereichen $D(f)$ und $D(g)$, so versteht man unter $f+g$ die Funktion mit Definitionsbereich $D(f) \cap D(g)$, definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

Analog definiert man $f-g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$ mit $D(\frac{f}{g}) = D(f) \cap \{x \in D(g) \mid g(x) \neq 0\}$.

Satz 10.1 f und g seien stetig an der Stelle x_0. Dann gilt:

(a) $f+g,\ f-g,\ f \cdot g$ sind stetig an der Stelle x_0.

(b) $\frac{f}{g}$ ist stetig an der Stelle x_0, falls $g(x_0) \neq 0$ gilt.

Beweis: Es sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in D(f) \cap D(g)$ und $x_n \to x_0$. Wegen der Stetigkeit von f und g folgt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)\,.$$

Also ist $f+g$ an der Stelle x_0 stetig. Analog zeigt man die übrigen Behauptungen des Satzes (Beweis als Übungsaufgabe empfohlen).

Def 10.2 a) Ein *Polynom p vom Grad n* ist eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad \text{mit} \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ und } a_n \neq 0.$$

b) Eine Funktion r heißt *rationale Funktion* $:\iff r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p und q.

Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion r ist in der Regel $D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$. Als eine unmittelbare Folgerung aus Satz 10.1 und den ersten Beispielen erhält man:

Satz 10.2 a) Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

b) Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Beispiel: $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$, ist im ganzen Definitionsbereich stetig.

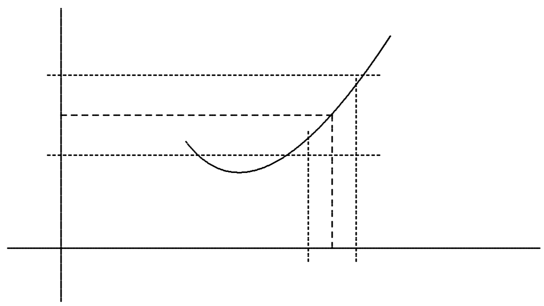
Will man untersuchen, ob f an einer Stelle x_0 stetig ist, muss man nicht ihren gesamten Definitionsbereich $D(f)$ im Auge haben. Wichtig ist nur, wie sich f in einem beliebig kleinen offenen Intervall I mit $x_0 \in I$ verhält. Man sagt daher auch, dass Stetigkeit eine *lokale Eigenschaft* einer Funktion ist. Mit anderen Worten: Ob f in x_0 stetig ist, hängt nicht von f insgesamt, sondern nur vom Verhalten von f in der unmittelbaren Nähe von x_0 ab.

Stetigkeit in einem Punkt kann man daher auch folgendermaßen ausdrücken:

Satz 10.3 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ stetig $\iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Hierzu wird die folgende Skizze in der Vorlesung beschriftet:



Bevor wir diesen Satz beweisen, formulieren wir die Aussage noch einmal (nahezu) ohne mathematische Zeichen: Stetigkeit an der Stelle x_0 bedeutet, dass man zu jeder (ε–)Umgebung um $f(x_0)$ eine (δ–)Umgebung um x_0 angeben kann, so dass die Bilder aller Zahlen aus der Umgebung um x_0 innerhalb der Umgebung von $f(x_0)$ liegen.

Beweis: „$\Leftarrow$": Zu zeigen ist: $x \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \to f(x_0)$:

Gegeben sei eine beliebige Folge $(x_n) \to x_0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Zu diesem δ wiederum gibt es wegen der Konvergenz von (x_n) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$.

$$\Rightarrow \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0$$

Also konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.

„$\Rightarrow$": Zu zeigen ist: $\forall \varepsilon > 0 \ldots$, vorausgesetzt ist die Stetigkeit von f in x_0.

Wir gehen indirekt vor und nehmen an, die Behauptung ist falsch. Das bedeutet:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta, \text{ aber } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Mit anderen Worten: Es gibt mindestens eine Folge $x_n \to x_0$ (denn: $\forall \delta > 0\ \exists x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$), deren Bildfolge $f(x_n)$ *nicht* gegen $f(x_0)$ konvergiert (denn: $\exists \varepsilon > 0\ \ldots\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung der Stetigkeit in x_0, damit ist der Satz bereits bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 10.3 können wir Stetigkeit an einer Stelle x_0 auf eine zweite Art nachweisen. Wir wollen dies an einigen Beispielen üben, wobei der Definitionsbereich in allen Fällen $\mathbb{R}$ ist.

Beispiele: 1) Jede konstante reelle Funktion f ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig: Wegen $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ genügt jedes $\delta > 0$ der Bedingung von Satz 10.3.

2) $f(x) = 2x$ ist ebenfalls überall stetig: Für jedes $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = 2|x - x_0| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} =: \delta$$

Das gesuchte δ hängt in diesem Beispiel von ε, nicht aber von x_0 ab.

3) $f(x) = x^2$ ist in $x_0 = 0$ stetig: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wegen

$$|f(x) - f(0)| = |x^2| < \varepsilon \iff |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

erfüllt $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ die Stetigkeitsbedingung, denn für alle $x \in D(f)$ mit $|x-0| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ ist $|f(x)-f(0)| < \varepsilon$.

Für den Nachweis der Stetigkeit in $x_0 = 3$ reicht $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ nicht aus. Für jedes $0 < \varepsilon < 1$ und $x = 3 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ ist zwar $|x-3| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} < \sqrt{\varepsilon}$, aber $|f(x) - f(3)| = 3 \cdot \sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4} > 3 \cdot \sqrt{\varepsilon} > \varepsilon$. Trotzdem ist f auch in $x_0 = 3$ stetig. Zum Nachweis benötigt man ein „besseres“ δ, beispielsweise $\delta = \min\{1, \sqrt{9+\varepsilon} - 3\}$. Wir verzichten auf die explizite Durchführung und merken uns nur, dass im Allgemeinen das gesuchte δ von ε *und* der zu untersuchenden Stelle x_0 abhängt.

4) $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig: Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es wegen $|f(x) - f(0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$ für alle $x < 0$ garantiert kein δ mit der geforderten Eigenschaft.

Wir merken uns: Stetigkeit in x bedeutet, dass man zu jeder Umgebung V um $f(x)$ immer eine Umgebung U um x findet mit $f(U) \subset V$.

Unstetigkeit in x bedeutet demnach: Es gibt eine Umgebung V um $f(x)$, zu der keine Umgebung U um x mit $f(U) \subset V$ existiert. Mit anderen Worten: In jeder noch so kleinen Umgebung von x finden wir ein schwarzes Schaf, dessen Funktionswert nicht in V liegt.

In vielen Büchern wird Stetigkeit mit Hilfe von Satz 10.3 *definiert* und unsere Definition 10.1 als dazu äquivalente Aussage bewiesen.

Wir beenden diesen Paragraphen mit zwei Problemen, deren Lösungen nicht unmittelbar einsichtig sind.

1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \ \text{ und für } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{für} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \quad \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Frage: An welchen Stellen ist f stetig?

Antwort: f ist unstetig für $x_0 \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, denn in jeder δ – Umgebung von x_0 liegen irrationale Zahlen mit $f(x) = 0$. Somit ist die $\varepsilon - \delta$ – Bedingung für kein ε mit $0 < \varepsilon < f(x_0)$ erfüllt.

Hingegen ist f stetig für $x_0 \notin \mathbb{Q}$ und für $x_0 = 0$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Da es nur endlich viele $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ gibt mit $f(x) \geq \frac{1}{n_0}$, existiert $\alpha := \min\{|x - x_0| \mid f(x) \geq \frac{1}{n_0}\} > 0$. Wir können dieses α als δ im Sinne von Satz 10.3 benutzen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ haben wir ein $\delta (= \alpha) > 0$ gefunden, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) In der Anschauungsebene $\mathbb{R}^2$ sei das Dreieck ABC mit $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ und $C = (0, 1)$ und ein fester Punkt $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $p_2 \neq 0$ gegeben. Wir definieren eine Funktion $l_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgendermaßen:

Bestimme zu $x \in \mathbb{R}$ die Gerade durch P und $X = (x, 0)$. Der Funktionswert $l_P(x)$ ist dann die Länge des Teils dieser Geraden innerhalb des Dreiecks ABC.

Frage: Hängt es von dem gewählten Punkt P ab, ob l_P stetig oder unstetig ist?

11 Einfache Eigenschaften stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt sollen einige interessante Eigenschaften stetiger Funktionen angegeben werden.

Satz 11.1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig mit $f(x_0) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit $f(x) > 0 \quad \forall x \in D \cap U$.

Beweis: Auf Grund der Stetigkeit von f in x_0 gibt es nach Satz 10.3 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta,$$

also auch zu $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Für das zugehörige δ zeigen wir

Beh: $U(x_0) = \ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ist die gesuchte Umgebung. (d.h. $\forall x \in U(x_0)$ gilt $f(x) > 0$)

Bew: Sonst gibt es ein $z \in U(x_0)$ mit $f(z) \leq 0$ und $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$. Für dieses z folgt

$$\frac{f(x_0)}{2} = \varepsilon > |f(z) - f(x_0)| = f(x_0) - f(z) > f(x_0) > 0$$

Dies ist aber nicht möglich, denn sonst wäre $\frac{1}{2} > 1$.

Unmathematisch ausgedrückt besagt der Satz: Wenn eine stetige Funktion an einer Stelle positiv ist, dann auch „direkt daneben“.

Eine analoge Aussage ist auch für $f(x_0) < 0$ möglich. In diesem Fall gilt: $\exists U(x_0)$ mit $f(x) < 0 \; \forall x \in D \cap U$.

Die Voraussetzung *stetig in* x_0 ist in Satz 11.1 notwendig, wie uns das einfache Beispiel der in $x_0 = 0$ unstetigen Funktion $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ zeigt.

Frage: Kann man einen ähnlichen Satz für $f(x_0) = 0$ formulieren?

Ein (auch in der Schule) häufig gestelltes Problem beschäftigt sich mit der Existenz und dem Auffinden von Nullstellen von Funktionen. Für eine auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ stetige Funktion kennt man folgende Aussage über die Existenz von Nullstellen:

Satz 11.2 (*Nullstellensatz von Bolzano*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$ (oder umgekehrt). Dann besitzt f mindestens eine Nullstelle, d.h., $\exists x_0 \in \ ]a, b[$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis: Wir argumentieren wie im alternativen Beweis des Satzes von Bolzano–Weierstraß, indem wir $u_1 = a, o_1 = b$ und $t := \frac{u_1 + o_1}{2}$ setzen. Im Fall $f(t) = 0$ haben wir die gesuchte Nullstelle $x_0 = t$ gefunden, für $f(t) < 0$ setzen wir $u_2 = t$ und $o_2 = o_1$, für $f(t) > 0$ sei $u_2 = u_1$ und $o_2 = t$. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge (u_n) und eine monoton fallende Folge (o_n) mit gleichem Grenzwert x_0. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit folgt $f(u_n) \to f(x_0)$, $f(o_n) \to f(x_0)$ mit $f(u_n) < 0$, $f(o_n) > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 11.1 muss $f(x_0) = 0$ sein: $f(x_0) > 0$ steht im Widerspruch zu $f(u_n) \to f(x_0)$, denn es gibt eine Umgebung von x_0, in der alle Funktionswerte positiv sind, $f(x_0) < 0$ geht nicht wegen $f(o_n) \to f(x_0)$.

Wie beim Satz von Bolzano–Weierstraß kann man auch hier einen völlig anderen Beweis führen:

Alternativer Beweis: Sei $A := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$. Wegen $a \in A$ ist $A \neq \emptyset$, ferner ist A auf Grund der Definition beschränkt. Da wir uns im Bereich der reellen Zahlen bewegen, muss die Menge A ein Supremum besitzen, sei $x_0 = \sup A$ mit $x_0 \in [a,b]$.

Beh: x_0 ist der gesuchte Punkt mit $f(x_0) = 0$.

Bew: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in A$ und $x_n \to x_0$. Wegen der Stetigkeit gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ mit $f(x_0) \leq 0$. Wir schließen den Fall $f(x_0) < 0$ aus: Sonst gibt es (erneut wegen Satz 11.1) ein $\delta > 0$ mit $f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) < 0$, ein Widerspruch zu $x_0 = \sup A$.

Der Nullstellensatzes gilt nicht, falls die Voraussetzungen (abgeschlossenes Intervall, Stetigkeit) nicht beide erfüllt sind:

1) Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0, f(b) > 0$ für $a, b \in D$ muss keine Nullstelle haben, wenn D kein Intervall ist, ein Gegenbeispiel ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := -1$ für $x < 0$ und $f(x) := +1$ für $x > 0$.

2) Verzichtet man auf die Voraussetzung der Stetigkeit, gibt es ebenfalls leicht zu findende Gegenbeispiele (welche?).

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Nullstellensatz ist der sogenannte *allgemeine Fixpunktsatz*

Satz 11.3 Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion

$$\Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in [a,b] : \; f(x_0) = x_0$$

Beweis: Wir können von $a < f(a)$ und $f(b) < b$ ausgehen – andernfalls hätten wir ja bereits einen Fixpunkt gefunden. An Stelle von f betrachten wir die Funktion

$$g : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{cases}$$

g ist nach Satz 10.1 stetig mit $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$, wir können auf g den Nullstellensatz anwenden und erhalten $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0$.

Fragen: Gilt der Satz auch für nichtstetige Funktionen? Gilt der Satz für stetige Funktionen, wenn der Definitionsbereich kein Intervall ist?

Mit den letzten Sätzen haben wir Aussagen über *ein* Element des Bildbereiches gemacht. Allgemeiner gilt:

Satz 11.4 (*Zwischenwertsatz*)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Sei oBdA $f(a) < f(b)$, zu zeigen ist

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists\, x \in [a,b] \; : \; f(x) = y$$

Sei $y \in [f(a), f(b)]$. Für die ebenfalls stetige Funktion $g : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - y \end{cases}$ folgt aus dem Nullstellensatz

$$\exists x \in [a,b] : \; 0 = g(x) = f(x) - y \iff f(x) = y$$

Auch dieser Satz wird falsch, wenn man auf eine der Voraussetzungen verzichtet. Dies heißt natürlich nicht, dass unstetige Funktionen sich nie bijektiv auf Intervallen verhalten können:

Beispiel: Sei $f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$

Obwohl f nur an einer Stelle (welcher?) stetig ist, kommt jeder Wert zwischen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ genau einmal als Funktionswert vor:

Für $y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ gilt $f(y) = y$, für $y \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ gilt $f(1-y) = 1-(1-y) = y$.

In den Übungen werden wir eventuell überlegen, ob es auch *überall* unstetige Funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ geben kann, die trotzdem der Aussage des Zwischenwertsatzes genügen.

Laut Zwischenwertsatz wird für stetige Funktionen, die auf einem Intervall $[a,b]$ definiert sind, jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als Bild angenommen. Es gilt sogar

Satz 11.5 (*Prinzip vom Maximum und Minimum*)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f([a,b]) := \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, insbesondere existieren $\min f([a,b])$ und $\max f([a,b])$.

Beweis:[21] 1) Wir zeigen $f([a,b])$ ist nach oben beschränkt.

Angenommen, die Behauptung 1) ist falsch. Dann existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in [a,b]$ und

$$f(x_n) \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad (*)$$

Da (x_n) beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x'_n) mit Grenzwert x. Wegen der Abgeschlossenheit von $[a,b]$ muss auch $x \in [a,b]$ gelten (sonst kann keine Konvergenz vorliegen), also besitzt x ein Bild $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ f(x) \leq n_0$$

Damit kann $f(x)$ wegen $(*)$ kein Grenzwert der Folge $(f(x_n))$ sein, was im Widerspruch zur Stetigkeit der Funktion f steht.

$f([a,b])$ ist demnach beschränkt, wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen existiert $s = \sup f([a,b])$.

2) Wir zeigen $s \in f([a,b])$, also $s = \max f([a,b])$:

Es sei (y_n) eine Folge aus $f([a,b])$ mit $y_n \to s$. Die beschränkte Folge (x_n) der Urbilder von y_n besitzt nach Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x'_n) mit Grenzwert $v \in [a,b]$. Wegen der Stetigkeit von f und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes müssen $f(v)$ und s übereinstimmen, dies ist äquivalent zur Behauptung $s = \max f([a,b])$.

3) Die Existenz von $\min f([a,b])$ zeigt man analog.

4) $f([a,b])$ ist als beschränkte und abgeschlossene Menge nachgewiesen. Dass es sich um ein Intervall handelt, folgt unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz.

Beispiel: Für die Sinusfunktion mit eingeschränktem Definitionsbereich $[a,b] = [0,\pi]$ gilt $f([a,b]) = [0,1]$, wobei das Maximum 1 an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ und das Minimum 0 an den Stellen 0 und π erreicht werden.

[21] Dieser Beweis wird in der Vorlesung eventuell nicht behandelt, seine Kenntnis ist zum Bestehen des Examens nicht lebensnotwendig. Wegen der intensiven Verwendung von früher gelernten Tatsachen sei er den Studierenden, die Freude an der Mathematik haben, aber nicht vorenthalten.

Das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls ist nach Satz 11.5 wieder ein abgeschlossenes Intervall. Für (halb)offene Intervalle ist der Satz falsch, wie uns die Funktion $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$ zeigt.

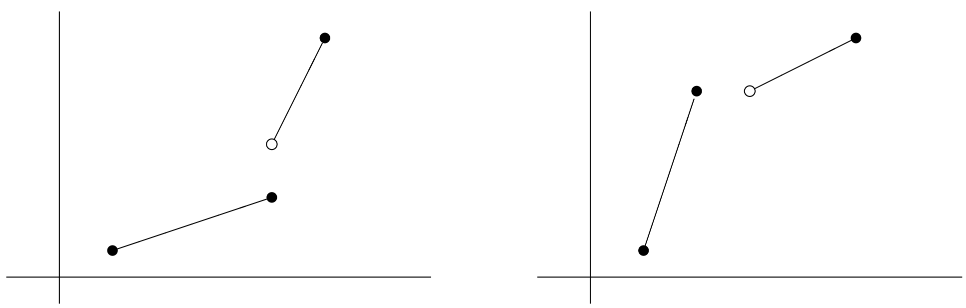
Abgeschlossene (endliche) Intervalle sind ein Spezialfall von sogenannten *kompakten* Mengen[22]. Aus Zeitgründen können wir nicht auf interessante Zusammenhänge zwischen Kompaktheit und Stetigkeit eingehen, für Interessenten sei auch an dieser Stelle auf das bereits mehrfach erwähnte Buch von Heuser hingewiesen.

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Satz, in dem die Begriffe streng monoton, bijektiv (in Form von Umkehrfunktion) und stetig vorkommen:

Satz 11.6 (*Umkehrsatz für streng monotone Funktionen*)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann existiert auf der Bildmenge $f(I)$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$, die außerdem stetig und streng monoton wachsend ist.

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. In der Vorlesung soll allerdings die folgende Skizze so beschriftet werden, dass man in ihr die Aussage des Umkehrsatzes erkennen kann.



Im Umkehrsatz ist nicht vorausgesetzt, dass f stetig ist. Falls f stetig ist, ist auch $f(I)$ ein Intervall. Der Satz gilt analog für streng monoton fallende Funktionen.

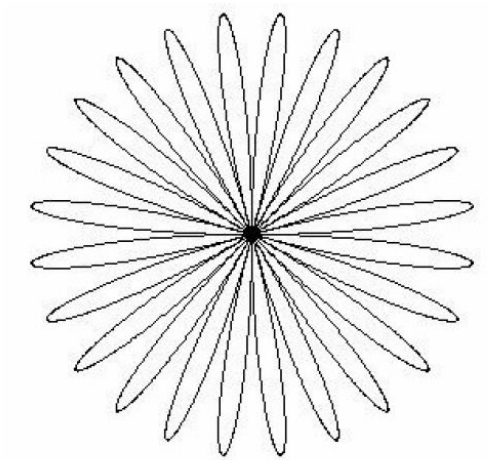
12 Über Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Es werden elementare Eigenschaften höherdimensionaler reeller Funktionen angegeben.

Der Gestalt von Graphen reeller Funktionen sind enge Grenzen gesetzt, beispielsweise kann kein Kreis als Bild vorkommen, da keinem $x \in \mathbb{R}$ zwei Funktionswerte zugeordnet sein dürfen. Für einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r benötigt man zwei Funktionen

$$f_i : \begin{cases} [-r, r] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad (-1)^i \sqrt{r^2 - x^2} \end{cases} \qquad \text{mit } i = 1, 2$$

[22]Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, wenn sie beschränkt ist und für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in K$ auch ihr Grenzwert in K liegt.



Bei komplizierteren Kurven wie bei der nebenstehenden Rosette ist eine Angabe von geeigneten Funktionen nahezu unmöglich. Mit einer kleinen Begriffserweiterung bekommen wir diese Dinge allerdings recht einfach in den Griff.

Def 12.1 Seien $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ für $i = 1,2$ beliebige Funktionen. Dann heißt

$$f : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (f_1(t),\ f_2(t)) \end{cases}$$

Parameterdarstellung (einer ebenen Kurve).

Manchmal wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ selbst ebene Kurve genannt. Jede reelle Funktion f ist der Spezialfall einer ebenen Kurve mit $f_1 = \mathrm{id}$ und $f_2 = f$.

Man kann Definition 12.1 auf räumliche Parameterkurven $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ übertragen, für $t \in \mathbb{R}$ ist dann $f(t) := (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$.

Beispiele: 1) Für $r \in \mathbb{R}^+$ ist

$$f : \begin{cases} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{cases}$$

die Darstellung eines Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r > 0$. Der Kreis „beginnt“ im Punkt $f(0) = (r \cdot \cos 0,\ r \cdot \sin 0) = (r,0)$ und „wandert“ entgegen dem Uhrzeigersinn über $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,r),\ f(\pi) = (-r,0),\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0,-r)$ wieder zurück nach $(r,0)$.

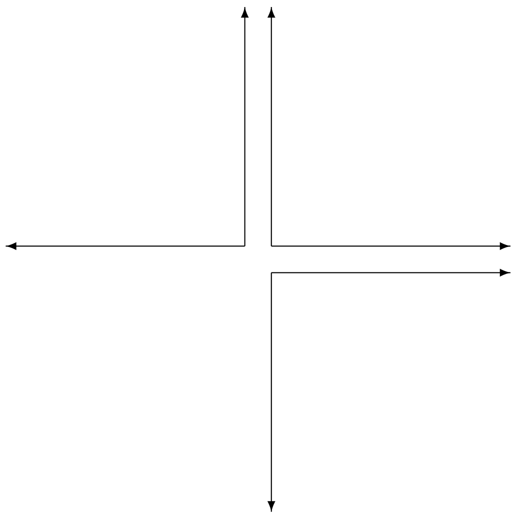
2) Die Rosette von oben stammt von der Funktion

$$f : \begin{cases} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\sin(12t) \cdot \cos t,\ \sin(12t) \cdot \sin t) \end{cases}$$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (t, 2t, 3t)$ ist die Gerade des Anschauungsraumes durch $(0,0,0)$ und $(1,2,3)$.

4) *Frage*: Was ist das Bild von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (\sin t,\ \cos t,\ t)$?

Wir wollen eine Hilfskonstruktion zum Zeichnen von ebenen Parameterkurven $f(t)$ angeben.



1) Zeichne links den Graphen von $f_1(t)$ und unten den von $f_2(t)$ unter Beachtung der Pfeilrichtungen

2) „Konstruiere“ die Parameterkurve aus $f_1(t)$ und $f_2(t)$.

(Zeichnung wird in der Vorlesung an Hand eines Beispiels ergänzt)

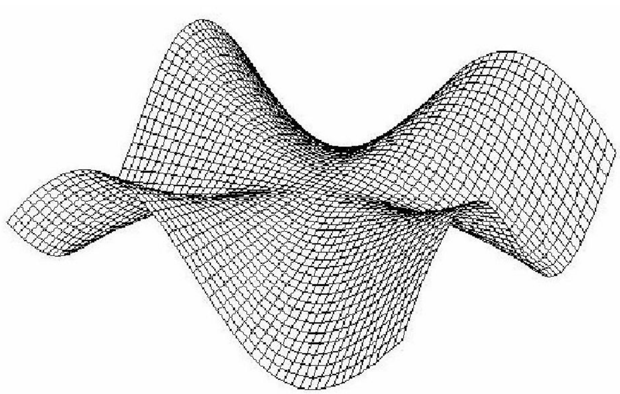
An den *Beispielen* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(t) = 2$, $f_2(t) = t$ und $g\,(t) = (t^2, t^2)$ für $t \in [0,1]$ erkennen wir, dass man ohne weitere Informationen aus der Gestalt einer Parameterkurve nicht auf die beteiligten Funktionen $f_i(t)$ schließen kann. Eine Parameterkurve kann sogar „stetig aussehen“, obwohl beide Funktionen f_i an einigen Stellen nicht stetig sind.

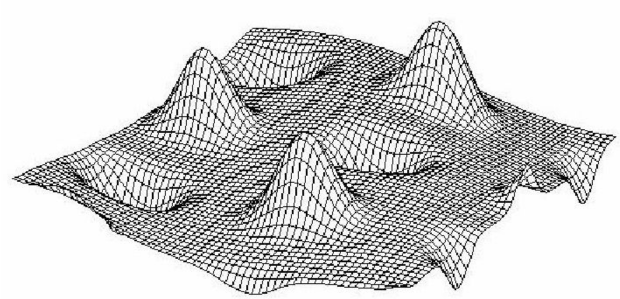
Jetzt beschäftigen wir uns mit Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $m = 1$ oder 3.

Wenn wir bei Abbildungen $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{cases}$ die reelle Zahl $f((x,y))$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ als „Höhe“ des „Funktionsgebirges“ an der Stelle (x,y) auffassen, bekommen wir eine Vorstellung des zugehörigen Graphen.

Beispiele: 1) $f : \begin{cases} [-4,4] \times [-4,4] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} -\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$ (linkes Bild)

2) $f : \begin{cases} [1.5,\ 22] \times [1.5,\ 22] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 5\left(\sin\frac{x}{3}\cos\frac{y}{2}\right)^5 + \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right) \end{cases}$ (rechtes Bild)





3) Wie sieht der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f((x, y)) := x^2 + y^2$ aus?

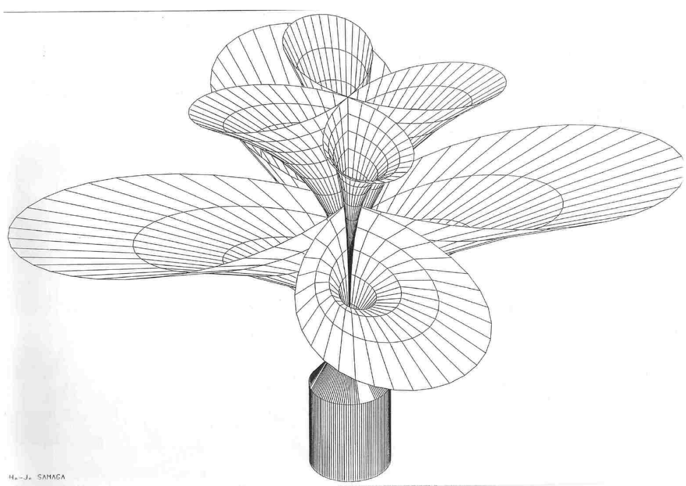
„Schönere“ und vor allem allgemeinere Bilder liefern Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, wenn man ähnlich wie bei den Parameterkurven den Bildbereich als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ zeichnet. In der Vorlesung werden wir uns mit der Funktion

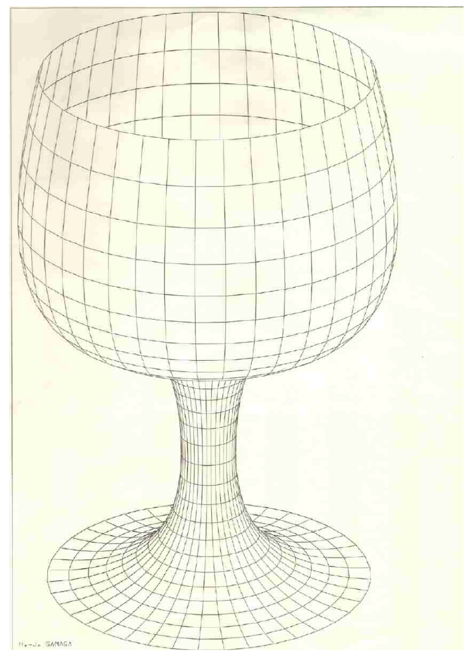
$$f : \begin{cases} [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ (t, u) & \mapsto \quad (\cos t \cos u, \sin t \cos u, \sin u) \end{cases}$$

beschäftigen, die ein Rechteck der Ebene auf die Oberfläche der Einheitskugel (Radius $r = 1$ und Mittelpunkt $M = (0, 0, 0)$) in $\mathbb{R}^3$ abbildet.

Frage: (Wie) kann man eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ auffassen?

Beispiele: Bilder von zwei weiteren Parameterflächen





13 Die Ableitung einer Abbildung

Viele Dinge des täglichen Lebens lassen sich durch Funktionen veranschaulichen; man denke etwa an Luftdruckwerte, festgestellt an einem bestimmten Ort zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder an verschiedenen Orten zu einem gegebenen Zeitpunkt. Messen wir jederzeit bzw. überall und berücksichtigen wir, dass der Luftdruck nicht „springt“, handelt es sich um Beispiele für stetige Funktionen. Zur Wettervorhersage (wann oder wo droht ein Orkan?) sind exaktes Wissen über das Verhalten der Werte bei minimalen Veränderungen der Variablen Zeit oder Ort erforderlich (wie schnell fällt der Luftdruck?).

Diese und ähnliche Sachverhalte wollen wir mathematisch präzise erfassen. Die Behandlung solcher (und vieler anderer) Fragen erfolgt mit Hilfe der sogenannten *Differenzialrechnung*, die auf *I. Newton (1643–1727)* und *G. W. Leibniz (1646–1716)* zurückgeht.

Als *Beispiel* wollen wir noch einmal die „Dreiecksfunktion“ l_P mit $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ p_2 \neq 0$ von Ende des Kapitels 10 untersuchen. Man bestimmt $l_P(x)$ für eine reelle Zahl x auf folgende Weise:

- Zeichne das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (-1, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$
- Zeichne die Gerade g durch P und $X = (x, 0)$
- Bestimme die Länge l des Teils von g, der innerhalb des Dreiecks verläuft
- Dann ist $l_P(x) = l$

Für $P = (1, 1)$ erhalten wir so die Funktion[23]

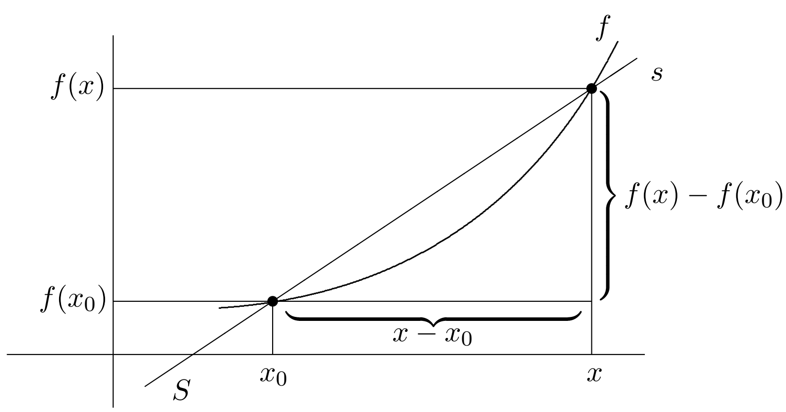
$$l_P : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{-2}{x(2-x)} \cdot \sqrt{1+(1-x)^2} & \text{für} \quad x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2-x} \cdot \sqrt{1+(1-x)^2} & \text{für} \quad -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 < x \end{cases} \end{cases}$$

l_P ist stetig. Wenn wir den Graphen sorgfältig zeichnen, stellen wir an den Stellen -1 und 1 „Knicke“ im Verlauf der Kurve fest. Offensichtlich stimmen hier die Grenzwerte der Steigungen der Sekanten „von links“ und „von rechts“ nicht überein.

Ab jetzt betrachten wir Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist. Für ein festes $x_0 \in I$ bilden wir zu jedem $x \in I$ mit $x \neq x_0$ den *Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Veranschaulichen können wir uns den Differenzenquotienten als Steigungsmaß („Verhältnis der Änderung von f zur Änderung von x“) der Sekante s durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

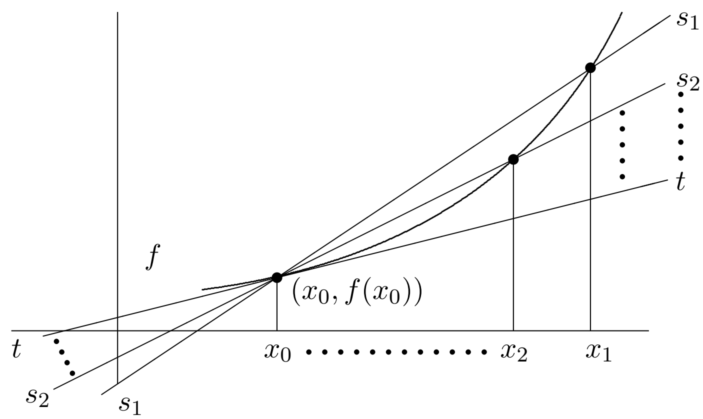


Weiter hinten in der grundlegenden Definition 1 werden wir den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

betrachten. Falls dieser Grenzwert existiert, d.h., falls es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$ gibt, werden wir a als *Ableitung von f an der Stelle x_0* bezeichnen. Veranschaulichen können wir uns a als das Steigungsmaß der Geraden t, an die sich die Sekante s annähert, wenn man x gegen x_0 streben lässt.

[23] Einzelheiten, beispielsweise wie man zu den konkreten Zahlen kommt, werden in der Vorlesung geklärt.



Man nennt t die *Tangente an f im Punkt* $(x_0, f(x_0))$. Ihr Steigungsmaß $a = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bezeichnet man mit $f'(x_0)$, also

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \textit{falls dieser Grenzwert existiert.}$$

Def 13.1 a) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in I :\iff$ Es existiert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn *Ableitung von f an der Stelle* x_0.
b) f heißt *differenzierbar auf* $X \subset I :\iff$ f ist an jeder Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar.
c) Sei f differenzierbar auf X. Dann heißt die Funktion

$$f' : \begin{cases} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases} \qquad \textit{Ableitung von f.}$$

Um Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0 nachzuweisen, muss man überprüfen, ob der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Hierzu wählt man sich eine *beliebige* Folge (x_n) mit $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ und untersucht $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$. [24]

Beispiele: 1) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, d.h. $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = 0$.

Denn: Ist (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{c-c}{x_n-x_0} = 0.$$

2) Die Funktion $f(x) = x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x_0) = 1$.

[24] Man beachte: Wenn etwas für eine *beliebige* Folge gilt, ist es für *jede* Folge gültig.

Denn: Ist (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1.$$

3) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x_0) = 2x_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - x_0^2}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n + x_0)(x_n - x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} (x_n + x_0) = 2x_0.$$

4) Die *Betragsfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = |x|$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht* differenzierbar: Einerseits erhalten wir für die Folge $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1,$$

andererseits gilt für die Folge $x_n = -\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = -1;$$

Damit existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht.

5) $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x_n^2}{x_n} = x_n & \text{für} & x_n \in \mathbb{Q} \\ \frac{0}{x_n} = 0 & \text{für} & x_n \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\} = 0$$

6) *Frage*: Ist $f(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

Zwischen den Begriffen stetig und differenzierbar besteht folgender Zusammenhang:

Satz 13.1 Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f auch stetig.

Beweis: Es sei $x_0 \in I$. Zu zeigen ist für jede Folge (x_n) mit $x_n \in I$ und $x_n \to x_0$ die Konvergenz $f(x_n) \to f(x_0)$. Es genügt, dies für Folgen (x_n) mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Die Behauptung $f(x_n) \to f(x_0)$ ist gleichbedeutend mit $f(x_n) - f(x_0) \to 0$. Wegen der Differenzierbarkeitsvoraussetzung von f in x_0 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(x_0)) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot (x_n - x_0) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch: Aus der Stetigkeit folgt i.A. nicht die Differenzierbarkeit, ein Gegenbeispiel haben wir mit der Betragsfunktion bereits kennengelernt.

Frage: Ist die Funktion f aus Beispiel 5 an einer Stelle $x_0 \neq 0$ differenzierbar?

Wenn die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f ebenfalls differenzierbar ist, kann man eine Funktion $(f')' = f''$ bilden. Auf diese Weise kommt man zu *höheren Ableitungen*, , d.h., f'' ist die Ableitung von f', f''' ist die Ableitung von f'' usw.; allgemein definiert man

$$f^{(n+1)} := (f^{(n)})'.$$

Die Funktion f selber bezeichnet man auch als 0–te Ableitung, d.h. $f^{(0)} = f$.

Beispiel: $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f'''(x) = f^{(4)}(x) = 0.$

Nicht immer ist die Ableitung einer Funktion selbst differenzierbar.

Beispiel: Wir untersuchen die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$.

f ist überall differenzierbar, für die Ableitung f' gilt $f'(x) := \begin{cases} -2x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 2x & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$.

Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn es ist $f'(x) = 2|x|$.

Setzt man $x = x_0 + h$, bedeutet $x \to x_0$ dasselbe wie $h \to 0$. Daher findet man manchmal auch folgende Darstellungen der Differenzierbarkeit:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{bzw. kürzer} \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Weitere alternative Schreibweisen zu $f'(x_0)$ sind $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$ oder $y'(x_0)$.

14 Einige Ableitungsregeln

Bereits für eine einfache Funktion wie $f(x) = x^3$ ist es mühsam, die Ableitung an einer Stelle x_0 nur mit Hilfe der Definition auszurechnen. Daher benötigen wir Regeln, die uns das Ableiten einfacher machen. Wenn nichts anderes gesagt wird, gehen wir immer von reellen Funktionen aus, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Satz 14.1 Es seien f und g an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann sind die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar; sofern $g(x_0) \neq 0$ gilt, ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar. Es gelten die Regeln:

a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (*Summenregel*)

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (*Produktregel*)

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ (*Quotientenregel*)

Beweis: a) Es sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x_n) - (f+g)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{f(x_n) + g(x_n) - f(x_0) - g(x_0)}{x_n - x_0} \\ &= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

b) Wir benutzen die gleichen Voraussetzungen wie in a). Ferner ist nach Satz 13.1 g in x_0 auch stetig, also gilt $g(x_n) \to g(x_0)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x_n)-(f\cdot g)(x_0)}{x_n-x_0} &= \frac{f(x_n)\cdot g(x_n)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x_n-x_0}\\ &= \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot g(x_n)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}\\ &\to f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

c) Wir formen den zu untersuchenden Quotienten um:

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{f}{g})(x_n)-(\frac{f}{g})(x_0)}{x_n-x_0} &= \frac{1}{g(x_n)g(x_0)}\cdot\frac{f(x_n)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_n)}{x_n-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x_n)g(x_0)}\cdot\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}\right)\\ &\to \frac{1}{g^2(x_0)}\cdot\big(f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)\big)\end{aligned}$$

Satz 14.2 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n$. Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Beweis (durch vollständige Induktion): Für $n = 0$ und $n = 1$ wurde die Behauptung im letzten Kapitel direkt aus der Definition nachgewiesen.

$n \mapsto n+1$: Für ein festes n sei die Behauptung richtig, d.h. $(x^n)' = nx^{n-1}$. Wir zeigen mit Hilfe der Produktregel, dass die Behauptung dann auch für $n+1$ gilt:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^{n-1} \cdot x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

Als eine weitere Konsequenz aus Satz 14.1 erhalten wir unmittelbar:

Korollar a) Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, es ist $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

b) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sind an allen Stellen ihres Definitionsbereiches (also für $q(x) \neq 0$) differenzierbar:

$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

Beispiele: 1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 11$: Wenn wir $f'(x)$ durch y' usw. abkürzen, erhalten wir $y' = 20x^3 - 6x$, $y'' = 60x^2 - 6$, $y''' = 120x$, $y^{(4)} = 120$ und $y^{(n)} = 0$ für alle $n \geq 5$.

2) Es soll $g(x) = \frac{4x^3+1}{x+1}$ differenziert werden. Nach der Quotientenregel erhält man:

$$g'(x) = \frac{12x^2(x+1) - (4x^3+1)}{(x+1)^2} = \frac{8x^3 + 12x^2 - 1}{(x+1)^2}.$$

Ein Spezialfall rationaler Funktionen sind Funktionen der Gestalt $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Man zeigt

Korollar Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $f(x) = x^z$. Dann ist $f'(x) = z \cdot x^{z-1}$.

Beweis: Es ist nur noch der Fall $z < 0$, also $-z = n \in \mathbb{N}$ zu untersuchen. Es ist $f(x) = x^z = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Mit der Quotientenregel gilt

$$f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1} = z \cdot x^{z-1}$$

Ohne Beweise[25] geben wir die nächsten Regeln an:

Satz 14.3 (*Kettenregel*)

Es seien $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(X) \subseteq Y$. Die Funktion f sei differenzierbar in $x_0 \in X$, und g sei differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ differenzierbar in x_0:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beispiele: 3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(x) = (3x^3 - 5x + 2)^7$. Es gilt $h(x) = g(f(x))$ für die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = 3x^3 - 5x + 2$ und $g(y) = y^7$ gegeben sind. Die Anwendung der Kettenregel ergibt

$$h'(x) \; = \; (g \circ f)'(x) \; = \; g'(f(x)) \cdot f'(x) \; = \; 7 \cdot (3x^3 - 5x + 2)^6 \cdot (9x^2 - 5).$$

4) Es sei $h(x) = \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{13}$. Mit der Kettenregel und dem Ergebnis aus Beispiel 2) erhalten wir

$$h'(x) = 13\left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{12} \cdot \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)' = 13\left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{12} \cdot \frac{8x^3 + 12x^2 - 1}{(x+1)^2}.$$

Auf Grund des Umkehrsatzes (Satz 11.6) existiert für eine streng monotone Funktion f eine Umkehrfunktion. Wenn f zusätzlich differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$, kann man auch die Umkehrfunktion ableiten:

Satz 14.4 (*Umkehrregel*)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, es gilt $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beispiel: 5) Es sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $y = f(x) = x^2$. f ist stetig und auf dem Definitionsbereich streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ ist die Wurzelfunktion $x = g(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$. Nach der Umkehrregel gilt für die Ableitung von f^{-1} an der Stelle y:

$$g'(y) \; = \; \frac{1}{f'(x)} \; = \; \frac{1}{2x} \; = \; \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Schreiben wir x statt y und $x^{\frac{1}{2}}$ statt $\sqrt{x}$, erhalten wir $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

[25] Beweise der Ketten– und der Umkehrregel findet man beispielsweise in: H. Junek, Analysis, Teubner Verlag 1998.

Allgemein folgt aus der Umkehrregel für $r \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ sogar: $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$, wobei noch zu klären wäre, was x^r für eine beliebige reelle Zahl r überhaupt bedeutet.

Wir benutzen die Umkehrregel, um die Ableitung von $\ln x$ zu bestimmen. Hierbei setzen wir voraus, dass die ln–Funktion die Umkehrabbildung von e^x ist und dass für die e–Funktion gilt

$$(e^x)' = e^x \ .$$

Satz 14.5 Sei $x > 0$. Dann gilt $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Beweis: Wir schreiben $y = f(x) = \ln x$ und erhalten zusammen mit $e^y = e^{\ln x} = x$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Weitere *Beispiele*: 6) $y = \sqrt[3]{2x^2+1} = \left(2x^2+1\right)^{\frac{1}{3}} \ \Rightarrow \ y' = \frac{1}{3}\left(2x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$

7) $y = 2^x \ \Rightarrow \ y' = \ln 2 \cdot 2^x$; denn es ist $y = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln 2} = (f \circ g)(x)$ mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = x \cdot \ln 2$. Wegen $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = \ln 2$ [26] ergibt die Kettenregel $y' = e^{x \ln 2} \cdot \ln 2 = \ln 2 \cdot 2^x$.

8) $y = x^x \Rightarrow y' = (x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\right) = x^x \cdot (1 + \ln x)$

9) Die Kenntnis der Ableitungen von Sinus und Cosinus sollte zum mathematischen Allgemeingut gehören: $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$

10) $y = e^{\sin\sqrt{x}}$ ist vom Typ $y = f(g(h(x)))$ mit $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$ und $f(x) = e^x$. Mehrfache Anwendung der Kettenregel führt zum Ergebnis

$$y' = f'(\sin\sqrt{x}) \cdot g'(\sqrt{x}) \cdot h'(x) = e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht selbst differenzierbar sein muss. Es gibt sogar differenzierbare Funktionen mit unstetigen Ableitungen:

Beispiel: 11) Die Funktion $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$ ist nach den Ableitungsregeln für $x \neq 0$ differenzierbar, die Ableitung ist in diesem Fall $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Für $x = 0$ kann man die Differenzierbarkeit mit Hilfe der Definition und Satz 3.3 [27] nachweisen, es ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} \ = \ \lim_{x \to 0} \left(x \sin\frac{1}{x}\right) \ = \ 0$$

Damit ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Dass diese Funktion in $x_0 = 0$ nicht stetig ist, möge man selbst nachprüfen. (Hinweis: Man untersuche die Folge $\left(\frac{1}{n\pi}\right) \to 0$.)

[26] Beachten Sie, dass es sich bei dem Graphen der Funktion g um eine Gerade mit Steigung $\ln 2$ handelt. $\ln 2$ ist eine Konstante und darf nicht mit der Funktion $\ln x$ verwechselt werden!

[27] Satz 3.3 besagte, dass das Produkt aus Nullfolge und beschränkter Folge ebenfalls eine Nullfolge ist.

Zum Kuriositätenkabinett der Differenzialrechnung gehören ferner Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber an keiner einzigen Stelle differenzierbar sind, beispielsweise $f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} b^i \cos(n^i \pi x)$, wobei $b \in \mathbb{R}$ und $n \in N$ die Bedingungen $0 < b < 1$, n ungerade und $nb > 1$ erfüllen müssen.

Zum Abschluss wollen wir die Differenzialrechnung zur Bestimmung von Grenzwerten der Art

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

benutzen, wenn Zähler und Nenner für $x \to x_0$ beide gegen 0 bzw. beide gegen ∞ streben. Der folgende Satz liefert uns hierfür eine schlagkräftige Methode. Man fasst Sätze dieser Art unter dem Namen *Regeln von de l'Hospital* zusammen, benannt nach *Guillaume Francois Antoine Marquis de l'Hospital, (1661–1704)*. Wir verzichten auf Beweise und gehen nur auf den Fall „$\frac{0}{0}$“ ein, andere Fälle bearbeitet man analog.

Satz 14.6 Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ differenzierbar, es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$, und ferner sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Beispiele: 12) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x}$ soll berechnet werden. Für $x \to 0$ streben sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0, d.h., die Berechnung des Grenzwertes ist nicht ohne weiteres möglich. Anwendung von Satz 14.6 ergibt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{3} = \frac{1}{3}.$$

13) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4} = \frac{1}{2}.$

Dieses Beispiel zeigt, dass manchmal erst mehrfache Anwendung der Regel von de l'Hospital zum Erfolg führt.

14) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \overset{e^x \text{stetig}}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^1 = e$, wobei der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x)$ nach der Regel von de l'Hospital bestimmt wurde (wie?).

Bemerkung: Ein entsprechender Satz gilt für $x \to \infty$ an Stelle von $x \to x_0$ und für den Fall „$\frac{\infty}{\infty}$“.

Beispiel: 15) Es soll $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \ln x)$ berechnet werden. Es gilt $x \cdot \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, also

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

Mit den Regeln von de l'Hospital kann man zeigen, dass jede Exponentialfunktion a^x mit $a > 1$ für $x \to \infty$ schneller wächst als jedes Polynom beliebig hohen Grades.

15 Weitere Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Im letzten Abschnitt aus der Analysis wollen wir uns mit der geometrischen Bedeutung von Ableitungen beschäftigen und zum Schluss den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung kennenlernen. Wenn nichts anderes gesagt wird, ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion. Wir werden nicht alle Beweise exakt durchführen und verweisen stattdessen auf die gängigen Lehrbücher.

Wir wissen: Ist f konstant, so ist die Ableitung f' überall gleich Null. Als Umkehrung gilt:

Satz 15.1 Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist f auf dem Intervall $[a,b]$ eine konstante Funktion.

Mit anderen Worten: Eine differenzierbare Funktion, die nirgends steigt oder fällt, muss konstant sein.

Satz 15.2 Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist f auf $[a,b]$ streng monoton wachsend; gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist f auf $[a,b]$ streng monoton fallend.

Sowohl Satz 15.1 als auch Satz 15.2 sind auf Grund der geometrischen Interpretation von $f'(x)$ als Steigung von f im Punkt $(x, f(x))$ einleuchtend, wir verzichten auf formale Beweise.

Frage: Gilt für differenzierbare Funktionen auch die Umkehrung von Satz 15.2?

Def 15.1 Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in\,]a,b[$ ein *lokales Maximum* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists\, \delta > 0 :\ f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Analog definiert man *lokales Minimum*.

Hat f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so nennen wir x_0 ein *lokales Extremum* von f (oder auch Extremstelle von f).

Satz 15.3 Wenn eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in\,]a,b[$ eine Extremstelle hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: OBdA habe f in x_0 ein lokales Maximum. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ist. Es folgt (da f in x_0 differenzierbar ist):

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}}.$$

Ist n hinreichend groß, so gilt $x_0 + \frac{1}{n} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und $x_0 - \frac{1}{n} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und somit $f(x_0 + \frac{1}{n}) \leq f(x_0)$ und $f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq f(x_0)$. Es folgt

$$\frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \geq 0.$$

Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \geq 0.$$

Insgesamt folgt $f'(x_0) = 0$.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen eines Extremums an der Stelle x_0: Für die Funktion $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$. An der Stelle $x_0 = 0$ hat f aber keine Extremstelle.

Es sei x_0 eine Nullstelle der ersten Ableitung f' von f. Um zu entscheiden, ob ein Minimum, ein Maximum oder überhaupt kein Extremum vorliegt, kann man die folgenden Sätze heranziehen.

Satz 15.4 Die Funktion f sei in $[a, b]$ zweimal differenzierbar, an der Stelle $x_0 \in]a, b[$ gelte $f'(x_0) = 0$.

a) Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

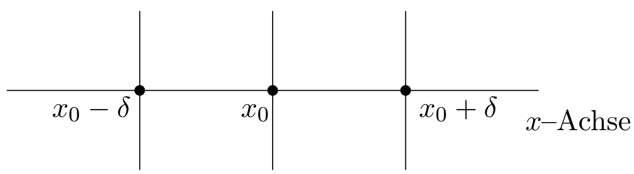
b) Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

Beweis: Wir zeigen nur a), der Beweis von b) verläuft analog. Es gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$:

$$0 > f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Es folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x \neq x_0$ (andernfalls wäre der Grenzwert nicht kleiner als Null). Hieraus folgt

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{und} \quad f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[.$$



Frage: Wie verläuft der Graph von f' in der Skizze? Man sagt, dass f' an der Stelle x_0 einen *Vorzeichenwechsel* von $+$ nach $-$ hat. Aus Satz 15.2 folgt: f ist im Intervall $[x_0 - \delta, x_0]$ streng monoton wachsend und im Intervall $[x_0, x_0 + \delta]$ streng monoton fallend. f hat an x_0 ein lokales Maximum.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$. Es ist $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x = x(\frac{3}{4}x - 2)$ mit den Nullstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{8}{3}$, ferner ist $f''(x) = \frac{3}{2}x - 2$. Wegen $f''(0) = -2$ und $f''(\frac{8}{3}) = 2$ liegt an der Stelle $x_0 = 0$ ein Maximum und an der Stelle $x_1 = \frac{8}{3}$ ein Minimum vor.

Ist $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, so gibt Satz 15.4 keine Auskunft darüber, ob ein Minimum, Maximum oder keine Extremstelle vorliegt. Hier kann manchmal der folgende Satz weiterhelfen, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 15.5 Die Funktion f sei in $]a, b[$ n–mal differenzierbar ($n \geq 2$). An der Stelle $x_0 \in]a, b[$ gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ist n eine gerade Zahl und gilt $f^{(n)}(x_0) < 0$ $[f^{(n)}(x_0) > 0]$, so hat f an x_0 ein lokales Maximum [lokales Minimum]. Ist n ungerade, liegt an der Stelle x_0 kein Extremum vor.

Beispiel: $f(x) = x^4$. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die erste von 0 verschiedene Ableitung $f^{(4)}(0) = 24 > 0$, es liegt ein Minimum vor. Bei $f(x) = x^5$ hat erst die fünfte Ableitung an der Stelle 0 nicht den Wert 0, daher existiert hier kein Extremum.

Satz 15.4 ist der Spezialfall $n = 2$ von Satz 15.5.

Def 15.2 Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so hat f an der Stelle x_0 ein *absolutes Maximum*, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Analog definiert man *absolutes Minimum*.

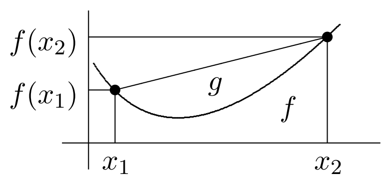
Ist $D = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und soll das absolute Maximum oder Minimum von f auf D gefunden werden, muss man sich auch um die Randpunkte a und b kümmern, in denen die Sätze für die Ableitungen nicht gelten müssen.

Beispiel: $D = [-1, 5]$, $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ (wie in einem früheren Beispiel). Absolute Maxima bzw. Minima könnten an den Stellen -1, 0, $\frac{8}{3}$ und 5 vorliegen. Es gilt $f(-1) = -\frac{5}{4}$, $f(0) = 0$, $f(\frac{8}{3}) = -\frac{64}{27}$, $f(5) = \frac{25}{4}$. Am Randpunkt $b = 5$ liegt ein absolutes Maximum vor, während das absolute Minimum bei $\frac{8}{3}$ erreicht wird.

Def 15.3 Eine Funktion f heißt *streng konvex* auf dem Intervall I, falls für alle $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt

$$f(x) \; < \; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von f zwischen x_1 und x_2 unterhalb der Verbindungsgeraden g der Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verläuft. (Man beachte, dass der rechts stehende Ausdruck in der Definition diese Gerade g beschreibt.)



Bildlich gesprochen „hängt“ eine streng konvexe Funktion „nach unten durch“.

Analog definiert man *konvex* bzw. *streng konkav* bzw. *konkav*; man braucht hierzu in der obigen Definition das Zeichen $<$ nur in $\leq$ bzw. $>$ bzw. $\geq$ abzuändern.

Ohne Beweis geben wir den folgenden Satz an, der den Zusammenhang von streng konvex bzw. streng konkav mit der zweiten Ableitung f'' herstellt:

Satz 15.6 a) Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in I = \,]a, b[$, so ist f auf I streng konvex.

b) Gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in I = \,]a, b[$, so ist f auf I streng konkav.

Def 15.4 Eine Nullstelle x_0 der zweiten Ableitung von f heißt ein *Wendepunkt* von f, falls f'' in x_0 einen Vorzeichenwechsel hat, d.h., wenn für ein $\delta > 0$ entweder

$$f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{und} \quad f''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

oder

$$f''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{und} \quad f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[.$$

gilt.

In einem Wendepunkt stößt ein Bereich, in dem die Funktion streng konvex ist, mit einem Bereich, in dem die Funktion streng konkav ist, zusammen. Oder anders gesagt: An einem Wendepunkt geht die Funktion von konvexer zu konkaver Krümmung über (oder umgekehrt).

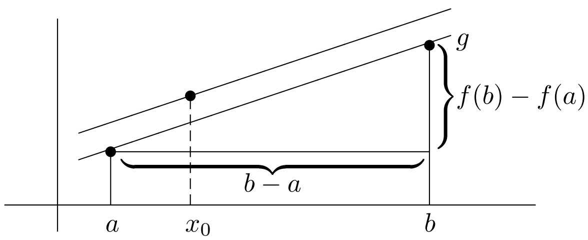
Damit haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um die in der Schule beliebten(?) Kurvendiskussionen erfolgreich durchführen zu können!

Differenzierbarkeit ist eine lokale Eigenschaft (Steigung der Tangente in einem Punkt). Im *Mittelwertsatz* wird für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Verbindung zwischen globaler Änderungsrate $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und lokaler Änderung in $x_0 \in \,]a, b[$ hergestellt.

Satz 15.7 (*Mittelwertsatz der Differenzialrechnung*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in \,]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Frage: Wie muss der Graph von f in obige Skizze eingefügt werden, damit der Mittelwertsatz dargestellt wird?

Der Mittelwertsatz ist anschaulich einleuchtend: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt die Steigung der Geraden g durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ an. Er besagt, dass es (mindestens) eine Stelle $x_0 \in \,]a, b[$ gibt, für die die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ parallel zu g verläuft.

Wir werden zuerst einen Spezialfall beweisen, benannt nach *Michel Rolle* (1652–1719):

Satz 15.8 (*Satz von Rolle*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in \,]a, b[$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Da die Behauptung für den Fall einer konstanten Funktion gilt, gehen wir oBdA von einer nicht konstanten Funktion aus. Nach dem Prinzip vom Maximum/Minimum (Satz 14.8, anwendbar wg. Satz 13.1) existieren $\min f([a, b])$ und $\max f([a, b])$; seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = \min f([a, b])$ und $f(x_2) = \max f([a, b])$. Da f nicht konstant ist, gilt $f(x_1) < f(x_2)$ und deshalb ist $\{x_1, x_2\} \neq \{a, b\}$. [28]:

Für $x_0 \in \{x_1, x_2\} \setminus \{a, b\}$ sind die Voraussetzungen von Satz 15.3 erfüllt und wir erhalten $f'(x_0) = 0$.

Beweis des Mittelwertsatzes: Mit Hilfe der gegebenen Funktion f definieren wir die ebenfalls differenzierbare Abbildung $g(x) := (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x)$. Wegen $g(a) = f(b)a - bf(a) = g(b)$ sind für g die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt: Es gibt ein $x_0 \in \,]a, b[$ mit $g'(x_0) = 0$.

Mit Hilfe der Differenziationsregeln erhalten wir andererseits

$$g'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot 1 - (b - a) \cdot f'(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Mit $g'(x_0) = 0$ folgt hieraus die Behauptung $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

[28] Wenigstens einer der Stellen x_1, x_2 ist verschieden von a oder b.

Wir wollen die Analysis mit einer nützlichen Anwendung beenden:

Das *Newton–Verfahren* dient zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen einer Funktion f. Es zeichnet sich dadurch aus, dass es sehr gut konvergiert und daher meist schon nach wenigen Iterationsschritten gute Näherungswerte liefert. Sorgfältig muss man allerdings auf das Erfülltsein folgender Bedingungen achten:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion mit

(1) $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$

(2) f'' überall stetig und es gilt entweder $f''(x) \geq 0$ oder $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$

(3) $f(a) \cdot f(b) < 0$.

(1) sorgt dafür, dass f *streng monoton* (steigend oder fallend) ist. Wegen (2) ist f auf $[a, b]$ *konvex oder konkav*. Bedingung (3) sichert die Existenz mindestens einer Nullstelle $c \in]a, b[$.

Sind (1) bis (3) erfüllt, kann man die (eindeutig bestimmte) Nullstelle c näherungsweise durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

bestimmen, wenn der Startwert x_0 „*auf der richtigen Seite*" von c gewählt wird, genauer:

(4) In den Fällen

(4.1) $f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f''(x) \leq 0$ und (4.2) $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f''(x) \geq 0$,

wähle man $x_0 \in [a, c]$; also etwa $x_0 = a$. In den übrigen Fällen

(4.3) $f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f''(x) \geq 0$ und (4.4) $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f''(x) \leq 0$,

wähle man $x_0 \in [c, b]$, also etwa $x_0 = b$.

Beispiel: Wir suchen eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Wir überprüfen (1) bis (4):

(1) $f'(x) = 2x + 2 \neq 0$ für alle $x \in [0, 3]$

(2) $f''(x) = 2$ ist auf ganz $[0, 3]$ stetig, es gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 3]$

(3) $f(0) \cdot f(3) < 0$

(4) $f(0) < 0,\ f(3) > 0,\ f''(x) \geq 0$

(1) bis (3) sind erfüllt und es liegt der Fall (4.3) vor. Daher wählen wir als Startwert $x_0 = 3$ und erhalten nacheinander

$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 1.75, \quad x_2 = 1.465909, \quad x_3 = 1.449544, \quad x_5 = 1.449490 = x_6$ usw.