Funktionalanalysis

Sommersemester 2021

Ingo Runkel
Bereich Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

(Stand: 30. Juli 2021)

Online

Der Kurs findet über MIN-Moodle statt, siehe
https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1308

Bücher

[W] Werner, Funktionalanalysis (Springer 2011)

[HS] Hirzebruch, Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis (Bibliographisches Institut 1971)

Denken

Bitte denken Sie beim Durchlesen dieser Notizen mit und sagen mir Bescheid, wenn Sie Fehler finden.

Inhaltsverzeichnis

In diesem Skript steht $\mathbb{K}$ für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

15 Normierte Räume

15.1 Normierte Räume und Isometrien

Definition 15.1.1 ([W, Def. I.1.1]). Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Halbnorm* auf X ist eine Funktion $p : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$,

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung)*.

Eine Halbnorm p ist eine *Norm*, falls zusätzlich gilt

(iii) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ für alle $x \in X$.

Wir schreiben $\|x\|$ statt $p(x)$. Ein *(halb)normierter Raum (über* $\mathbb{K}$*)* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum zusammen mit einer (Halb)norm. Wir schreiben $(X, \|\cdot\|)$ oder kurz X.

Lemma 15.1.2. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normiert Raum. Die Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Definition 15.1.3 ([W, Def. II.1.9]). Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt *Isometrie*, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \qquad \text{für alle } \ x \in X \ .$$

Eine bijektive Isometrie nennen wir auch einen *isometrischen Isomorphismus*.

Definition 15.1.4 ([W, Def. I.2.8]). Ein metrischer Raum (oder allgemein ein topologischer Raum) heißt *separabel* falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

- „abzählbar“ steht für „endlich“ oder „abzählbar unendlich“.
- Eine Teilmenge S eines metrischen (oder auch nur topologischen) Raumes M heißt *dicht*, falls $\overline{S} = M$. Anders gesagt: In jedem offenen ε-Ball um einen beliebigen Punkt $x \in M$ liegt mindestens ein Punkt von S.
- Für eine Teilmenge S in einem Vektorraum V schreibe $\operatorname{lin}(S) \subset V$ für die lineare Hülle von S, also für den von S erzeuten Unterraum von V.

Lemma 15.1.5 ([W, Def. I.2.9]). Sei X ein normierter Raum. Es sind äquivalent:

(i) X ist separabel.

(ii) Es gibt eine abzählbare Teilmenge $A \subset X$, sodass $\overline{\operatorname{lin}(A)} = X$.

Lemma 15.1.6. Untervektorräume von separablen normierten Räumen sind separabel.

Dies folgt aus der allgemeineren Aussage, dass Teilmengen von separablen metrischen Räumen separabel sind (→Übung).

15.2 Stetige lineare Abbildungen

Satz 15.2.1 ([W, Satz II.1.2])**.** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, und sei $T : X \to Y$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Es sind äquivalent:

(i) T ist stetig in 0.

(ii) T ist stetig in einem beliebigen Punkte $x \in X$.

(iii) T ist stetig.

(iv) T ist gleichmäßig stetig

(v) Es gibt ein $M \geq 0$, sodass für alle $x \in X$ gilt $\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$.

■ Gilt (v), so sagen wir T *ist beschränkt* (im Sinne, dass das Bild $T(B_{\leq 1})$ der abgeschlossenen Einheitskugel in Y beschränkt ist). Die Äquivalenz von (iv) und (v) besagt also, dass lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen genau dann stetig sind, wenn sie beschränkt sind.

■ Den Raum der stetigen lineare Abbildungen $X \to Y$ bezeichnen wir mit

$$L(X, Y) \; .$$

Im Fall $X = Y$ schreiben wir auch kurz $L(X)$.

Definition 15.2.2 ([W, Def. II.1.9])**.** Seien X, Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt *Isomorphismus*, falls T stetig und bijektiv ist, und falls $T^{-1} : Y \to X$ stetig ist.

■ Zusammen mit Satz 15.2.1 sieht man: Eine bijektive lineare Abbildung $T : X \to Y$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn es $m, M > 0$ gibt, sodass für alle $x \in X$:

$$m \|x\|_X \;\leq\; \|Tx\|_Y \;\leq\; M \|x\|_X \; .$$

Definition 15.2.3. Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf X heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $m, M > 0$ gibt, sodass für alle $x \in X$ gilt

$$m \|x\|_a \;\leq\; \|x\|_b \;\leq\; M \|x\|_a \; .$$

Satz 15.2.4. Auf endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen sind alle Normen äquivalent.

$\rightarrow$Übung [Z01A3]

Lemma 15.2.5. Seien X, Y normierte Räume. Ist X endlich-dimensional, so ist jede lineare Abbildung $X \to Y$ stetig.

Lemma 15.2.6. Sei X ein endlich dimensionaler normierter Raum. Dann ist eine Teilmenge von X genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Lemma 15.2.7 ([W, Lem. I.2.6])**.** (Rieszsches Lemma)
Sei $U \subsetneq X$ ein abgeschlossener echter Unterraum eines normierten Raumes X. Für jedes $0 < \delta < 1$ existiert ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und

$$\|x - u\| \geq 1 - \delta \qquad \text{für alle } \ u \in U \ .$$

Satz 15.2.8 ([W, Satz I.2.7])**.** Sei X ein normierter Raum. Es sind äquivalent:

(i) $\dim X < \infty$

(ii) $B_{\leq 1} \subset X$ ist kompakt

(iii) Jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Lemma 15.2.9. Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$. Dann ist $L(X, Y)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Satz 15.2.10. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Für $T \in L(X, Y)$ definiert

$$T \ \longmapsto \ \|T\| \ := \ \sup \left\{ \|Tx\|_Y \,\middle|\, x \in B_{\leq 1} \subset X \right\}$$

eine Norm auf $L(X, Y)$.

■ Die im Satz definierte Norm wird auch *Operatornorm* genannt. Somit ist also $L(X, Y)$ selber ein normierter Raum.

■ Falls $X \neq \{0\}$ kann man die Operatornorm auch wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \|T\| \ &= \ \sup \left\{ \|Tx\|_Y \,\middle|\, x \in X, \|x\|_X = 1 \right\} \\ &= \ \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \,\middle|\, x \in X, x \neq 0 \right\} . \end{aligned}$$

Lemma 15.2.11. Seien X, Y, Z normierte Vektorräume und $x \in X$, $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$. Es gilt

$$\|Tx\| \ \leq \ \|T\| \, \|x\| \quad , \quad \|ST\| \ \leq \ \|S\| \, \|T\| \ .$$

15.3 Vollständigkeit

Definition 15.3.1. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

Satz 15.3.2 ([W, Satz II.1.5])**.** Seien X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Sei U ein dichter Unterraum von X und $T \in L(U, Y)$. Dann gibt es genau ein $\widehat{T} \in L(X, Y)$, sodass $\widehat{T}|_U = T$. Es gilt $\|T\| = \|\widehat{T}\|$.

Definition 15.3.3. Sei X ein normierter Raum. Eine *Vervollständigung von* X ist ein Banachraum $\widehat{X}$ zusammen mit einer Isometrie $i_X : X \to \widehat{X}$, sodass

$$\overline{i_X(X)} = \widehat{X} .$$

Satz 15.3.4. Sei X ein normierter Raum und $(\widehat{X}, i_X)$ eine Vervollständigung von X. Sei Y ein Banachraum. Für jede stetig lineare Abbildung $T : X \to Y$ gibt es eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\widehat{T} : \widehat{X} \to Y$, sodass $T = \widehat{T} \circ i_X$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\forall T"'] & \widehat{X} \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\widehat{T}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Korollar 15.3.5. Vervollständigungen sind bis auf eindeutigen isometrischen Isomorphismus eindeutig.
Genauer: Seien $(\widehat{X}, i_X)$ und $(\widetilde{X}, j_X)$ Vervollständigungen von X. Dann gibt es einen eindeutigen isometrischen Isomorphismus $\phi : \widehat{X} \to \widetilde{X}$, sodass $\phi \circ i_X = j_X$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i_X"'] \arrow[dr, "j_X"] & \\ \widehat{X} \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\phi"] & & \widetilde{X} \end{tikzcd}$$

■ Wegen des Korollars werden wir häufig sagen „die Vervollständigung“ statt „eine Vervollständigung“.

Lemma 15.3.6. Sei X ein Banachraum und $U \subset X$ ein Unterraum. Dann ist $\overline{U}$ zusammen mit der Einbettung $U \hookrightarrow \overline{U}$ die Vervollständigung von U.

Lemma 15.3.7 ([W, Lem. I.1.3])**.** Sei X ein normierter Raum und U ein vollständiger Untervektorraum. Dann ist U in X abgeschlossen.

Satz 15.3.8 ([W, Satz II.1.4])**.** Sei X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Dann ist $L(X, Y)$ vollständig.

15.4 Quotienten und Summen

Definition 15.4.1 ([W, Def. I.3.1]). Sei X ein normierter Raum und $A \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge. Der *Abstand* von $x \in X$ zu A ist

$$d(x, A) \ := \ \inf \left\{ \|x - a\| \,\middle|\, a \in A \right\} .$$

■ Aus der Linearen Algebra: Für X ein Vektorraum und U ein Untervektorraum sei X/U der Quotientenraum. Wir schreiben $\underline{x} = x + U \in X/U$ für die Äquivalenzklasse von $x \in X$ und

$$\pi : X \to X/U \quad , \quad x \mapsto x + U$$

für die kanonische Projektion.

Satz 15.4.2 ([W, Satz I.3.2]). Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Untervektorraum. Es gilt:

(i) $\|\underline{x}\| := d(x, U)$ definiert eine Halbnorm auf X/U. Falls U abgeschlossen ist, so ist $\|\cdot\|$ eine Norm.

(ii) Ist X vollständig und U abgeschlossen, so ist X/U vollständig.

Für den Beweis von (ii) des Satzes benutzen wir das folgende technische Lemma:

Lemma 15.4.3 ([W, Lem. I.1.8]). Sei Z ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf Z. Es sind äquivalent:

(i) Sei $(z_n)_n$ eine $\|\cdot\|$-Cauchy-Folge in Z. Dann gibt es ein $z \in Z$ mit $\|z_n - z\| \to 0$ für $n \to \infty$.

(ii) Sei $(y_n)_n$ eine Folge in Z, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$. Dann gibt es ein $y \in Z$ mit $\|y - \sum_{k=1}^{n} y_k\| \to 0$ für $n \to \infty$.

■ Mit „$\|\cdot\|$-Cauchy-Folge“ ist gemeint, dass $(z_n)_n$ die definierende Eigenschaft einer Cauchy-Folge erfüllt, wobei die Norm durch die Halbnorm ersetzt wird.

■ Die Elemente z und y in Teil (i) und (ii) sind nur bis auf Elemente mit Halbnorm Null eindeutig.

■ Falls $\|\cdot\|$ eine Norm ist, so sagt (i) gerade, dass Z ein Banachraum ist, und (ii), dass absolut konvergente Folgen konvergieren.

Definition 15.4.4 ([W, Def. II.1.7]). Seien X, Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $\phi : X \to Y$ heißt *Quotientenabbildung*, falls ϕ die offene Einheitskugel $B_{<1,X}$ surjektiv auf $B_{<1,Y}$ abbildet.

■ Es folgt, dass $\|\phi\| = 1$, also insbesondere $\phi \in L(X,Y)$. Da eine offene Menge im Bild von ϕ enthalten ist, ist ϕ surjektiv.
■ Eine Quotientenabbildung bildet im Allgemeinen *nicht* $B_{\leq 1,X}$ surjektiv auf $B_{\leq 1,Y}$ ab.

Lemma 15.4.5. Seien X, Y normierte Räume, $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $\phi : X \to Y$ eine Quotientenabbildung mit $\ker(\phi) = U$. Dann gilt: Für jedes $T \in L(X,Z)$ mit $T(U) = \{0\}$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\widehat{T} : Y \to Z$, sodass $T = \widehat{T} \circ \phi$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[dr, "0"'] & X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\forall T"] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists! \widehat{T}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Dieses $\widehat{T}$ ist stetig und erfüllt $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Lemma 15.4.6 ([W, Satz II.1.8]). Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist die kanonische Projektion $\pi : X \to X/U$ eine Quotientenabbildung.

Lemma 15.4.7. Seien X, Y normierte Räume und $\phi : X \to Y$ eine Quotientenabbildung. Dann ist die induzierte Abbildung $\widehat{\phi} : X/\ker\phi \to Y$ ein isometrischer Isomorphismus.

Definition 15.4.8. Für normierte Räume X, Y nennen wir den $\mathbb{K}$-Vektorraum $X \oplus Y$ mit Norm $\|(x,y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$ die *direkte Summe von X und Y*.

■ Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X und $(y_n)_n$ eine Folge in Y. Dann gilt $(x_n, y_n) \to (x,y)$ in $X \oplus Y$ genau dann, wenn $x_n \to x$ in X und $y_n \to y$ in Y.

■ $X \oplus Y$ ist genau dann vollständig, wenn X und Y vollständig sind.

15.5 Die L^p-Räume

Für diesen Abschnitt sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ fixiert. Hier ist Ω eine Menge, $\mathcal{M}$ die σ-Algebra der messbaren Mengen und μ ein Maß (Def. 11.2.22). Z.B. $\Omega = \mathbb{R}^n$ mit Lebesgue-Maß, oder $\Omega = \mathbb{N}$ mit Zählmaß.

■ Für $1 \leq p < \infty$ setze

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \;=\; \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} \,\middle|\, \int_\Omega |f|^p \, d\mu \;<\; \infty \right\} ,$$

$$\|\cdot\|_p^* : \mathcal{L}^p(\Omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;, \quad \|f\|_p^* = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \; .$$

■ Für $p = \infty$ setze

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) \;=\; \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ messb. und außerhalb einer Nullmenge beschränkt} \Big\} \;,$$
$$\|\cdot\|_\infty^* : \mathcal{L}^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;, \quad \|f\|_\infty^* = \inf \big\{ \|f|_{\Omega\setminus N}\|_{\sup} \,\big|\, N \subset \Omega \text{ Nullmenge} \big\} \;.$$

Anders gesagt, $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn f messbar ist, und wenn es eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, sodass f auf $\Omega \setminus N$ beschränkt ist. Mit $\|\cdot\|_{\sup}$ wird hier die sup-Norm bezeichnet, um Verwechselung mit $\|\cdot\|_\infty^*$ zu vermeiden.

Lemma 15.5.1. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

■ Für $1 \leq p \leq \infty$ setze

$$\mathcal{N} \;=\; \big\{ f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \,\big|\, \|f\|_p^* = 0 \big\} \;\subset\; \mathcal{L}^p(\Omega) \;.$$

Die Menge $\mathcal{N}$ ist ein Untervektorraum und ist unabhängig von p: es gilt $f \in \mathcal{N}$ genau dann, wenn $|f|$ fast überall Null ist, oder äquivalent, wenn f fast überall Null ist.
Definition 15.5.2. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist der *L^p-Raum* $L^p(\Omega)$ definiert als

$$L^p(\Omega) \;=\; \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N} \;,$$

zusammen mit der Funktion $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\|\,\underline{f}\,\|_p \;=\; \|f\|_p^* \;,$$

wobei $\underline{f}$ für die Klasse $f + \mathcal{N}$ von $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ steht.

Satz 15.5.3. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

■ Für den folgenden Satz vereinbaren wir $\frac{1}{\infty} = 0$.

Satz 15.5.4 ([W, Satz I.1.6])**.** *(Höldersche Ungleichung)*
Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$. Dann $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und

$$\|fg\|_1^* \;\leq\; \|f\|_p^* \, \|g\|_q^* \;.$$

Lemma 15.5.5. Für alle $\sigma, \tau \geq 0$ und $0 < r < 1$ gilt

$$\sigma^r \, \tau^{1-r} \;\leq\; r\,\sigma + (1-r)\,\tau \;.$$

Satz 15.5.6 ([W, Kor. I.1.7])**.** *(Minkowskische Ungleichung)*
Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ gilt

$$\|f + g\|_p^* \;\leq\; \|f\|_p^* + \|g\|_p^*$$

■ Damit ist $\|\cdot\|_p^*$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Lemma 15.5.7. Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|^*$ eine Halbnorm auf X.

(i) $N = \{x \in X \mid \|x\|^* = 0\}$ ist ein Untervektorraum.

(ii) $\|\cdot\| : X/N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\underline{f} \mapsto \|f\|^*$ ist Repräsentaten-unabhängig und definiert eine Norm auf X/N.

(iii) Erfüllt X eine der Bedingungen in Lemma 15.4.3, so ist X/N ein Banachraum.

Lemma 15.5.8. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Der Vektorraum $\mathcal{L}^p(\Omega)$ zusammen mit der Halbnorm $\|\cdot\|_p^*$ erfüllt die Bedingungen aus Lemma 15.4.3.

■ Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $g \in L^q(\Omega)$ setze $T_g : L^p(\Omega) \to \mathbb{K}$,

$$T_g f \;=\; \int_\Omega g\, f\, d\mu \;.$$

Dies ist nach der Hölderschen Ungleichung wohldefiniert.

Satz 15.5.9. Sei $1 < p \leq \infty$ und $1 \leq q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Abbildung

$$L^q(\Omega) \to L\big(L^p(\Omega), \mathbb{K}\big) \quad , \quad g \mapsto T_g$$

ist eine Isometrie .

■ Eine *einfache, messbare Funktion* bezüglich des Maßraums $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ist eine Funktion $s : \Omega \to \mathbb{K}$ der Form

$$s \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \chi_{E_i} \;,$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $E_i \in \mathcal{M}$ (Def. 11.3.7, Bem. 11.4.1).

Lemma 15.5.10. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Die Äquivalenzklassen der einfachen, messbaren Funktionen liegen dicht in $L^p(\Omega)$.

Satz 15.5.11. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $1 \leq p < \infty$. Bezüglich des Lebesgue-Maßes gilt: Die Abbildung

$$i : C^0(K) \to L^p(K) \quad , \quad f \mapsto \underline{f}$$

hat dichtes Bild. („Stetige Funktionen sind dicht in $L^p(K)$.“)

16 Funktionale und Operatoren

16.1 Die Hahn-Banach Sätze

Definition 16.1.1 ([W, Def. III.1.1])**.** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *sublinear*, falls gilt:

(i) $p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$ und $x \in X$, und

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

Satz 16.1.2 ([W, Thm. III.1.2])**.** (Satz von Hahn-Banach, reelle Version) Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U \subset X$ ein Untervektorraum. Sei $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $f : U \to \mathbb{R}$ linear, sodass

$$f(u) \;\leq\; p(u) \quad \text{für alle} \;\; u \in U \;.$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$, sodass $F|_U = f$ und

$$F(x) \;\leq\; p(x) \quad \text{für alle} \;\; x \in X \;.$$

■ Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ kann man X auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen, und von $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen sprechen.

Lemma 16.1.3 ([W, III.1.3])**.** Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(i) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear, so ist $\tilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $X \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \operatorname{Re} \tilde{f}(x)$.

(ii) Sei $g : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear und $f = \operatorname{Re} g(x)$. Dann gilt $g = \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}$ wie in (i) definiert ist.

(iii) Sei $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und sei $g : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear. Dann:

$$\forall x \in X \;:\; |g(x)| \leq p(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in X \;:\; |\operatorname{Re}(g(x))| \leq p(x) \;.$$

(iv) Sei X normiert und $g : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear und stetig. Dann $\|g\| = \|\operatorname{Re}(g)\|$.

Satz 16.1.4 ([W, Thm. III.1.4])**.** (Satz von Hahn-Banach, komplexe Version) Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $U \subset X$ ein Untervektorraum. Sei $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $g : U \to \mathbb{C}$ linear, sodass

$$\operatorname{Re} g(u) \;\leq\; p(u) \quad \text{für alle} \;\; u \in U \;.$$

Dann existiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $G : X \to \mathbb{C}$, sodass $G|_U = g$ und

$$\operatorname{Re} G(x) \;\leq\; p(x) \quad \text{für alle} \;\; x \in X \;.$$

Korollar 16.1.5. Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset X$ ein Unterraum. Jede stetige lineare Abbildung $f : U \to \mathbb{K}$ besitzt eine normerhaltende stetige lineare Fortsetzung $F : X \to \mathbb{K}$, d.h. $F|_U = f$ und $\|F\| = \|f\|$.

■ Eine Teilmenge M eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes X heißt *konvex*, falls mit $m, n \in M$ auch ihre Verbindungsgerade in M liegt, also $tm + (1-t)n \in M$ für alle $t \in [0,1]$.

■ Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von konvexen Mengen ist konvex. Für eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ ist somit der Durchschnitt aller konvexer Mengen, die A enthalten, konvex. Dies ergibt die kleinste konvexe Menge, die A enthält und wird *konvexe Hülle von A* genannt.

Lemma 16.1.6 ([HS, Satz 6.8])**.** Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M \subset X$ nicht-leer und konvex. Für jedes sublineare $p : X \to \mathbb{R}$ existiert eine lineare Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f \leq p$ und

$$\inf_{x \in M} f(x) \ = \ \inf_{x \in M} p(x) \ .$$

Satz 16.1.7 ([HS, Kor. 6.9])**.** Sei X ein reeller normierter Raum und $A, B \subset X$ nicht-leer, konvex und mit positivem Abstand:

$$d(A,B) := \inf \left\{ \|a - b\| \,\middle|\, a \in A, b \in B \right\} \ > \ 0 \ .$$

Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(f(A), f(B)) \ > \ 0 \ .$$

■ Es folgt, dass $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

■ Ist X ein komplexer normierter Raum, so gilt die obige Aussage entsprechend mit $f : X \to \mathbb{C}$ stetig und $\mathrm{Re} f(A) \cap \mathrm{Re} f(B) = \emptyset$.

16.2 Eigenschaften von Dualräumen

Definition 16.2.1. Für einen normierten Raum X nennen wir $X' := L(X, \mathbb{K})$ den *Dualraum* zu X und $X'' = (X')'$ den *Bidualraum*.

Lemma 16.2.2 ([W, Kor. III.1.6, III.1.8])**.** Sei X ein normierter Raum und $x \in X$, $x \neq 0$.

(i) Es gibt $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$.

(ii) Sei $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $x \notin U$. Es gibt $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_U = 0$ und $\varphi(x) \neq 0$.

- Nach Satz 15.3.8 ist X' vollständig, unabhängig von der Vollständigkeit von X.
- Definiere die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $j = j_X : X \to X''$ durch $x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$. Für $x \in X$ ist also $j_X(x)$ eine lineare Abbildung $X' \to \mathbb{K}$. Damit auch $j(x) \in X''$ gilt, müssen wir noch nachweisen, dass $j(x)$ stetig ist:

Lemma 16.2.3 ([HS, Lem. 7.6])**.** Sei X ein normierter Raum. Es gilt: j_X ist eine Isometrie.

- Setze $\widehat{X} := \overline{j_X(X)} \subset X''$. Mit Lemma 15.3.6 und der Vollständigkeit von X'' erhält man:

$$\big(\widehat{X}, j_X\big)$$

ist die Vervollständigung von X.

Definition 16.2.4. Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$. Die lineare Abbildung $T' : Y' \to X'$ ist definiert als, für $\varphi \in Y'$ and $x \in X$,

$$T'(\varphi) \ := \ \big(x \mapsto \varphi(T(x)) \big) \ .$$

T' heißt die zu T *transponierte (oder adjungierte) Abbildung.*

- Es gilt $\|T'(\varphi)\| = \|\varphi \circ T\| \leq \|\varphi\| \, \|T\|$. Also $\|T'\| \leq \|T\|$, insbesondere

$$T' \ \in \ L(Y', X') \ .$$

- Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle j_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j_Y} \\ X'' & \xrightarrow{T''} & Y'' \end{array}$$

Lemma 16.2.5. Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$. Es gilt $\|T'\| = \|T\|$.

- In Satz 15.5.9 und der nachfolgenden Bemerkung wurde gezeigt: Für $p \in [1, \infty]$ und q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist die Abbildung

$$i : l^q \to (l^p)' \quad , \quad x \mapsto \Big(y \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \Big)$$

eine Isometrie.

Satz 16.2.6 ([W, Satz II.2.3 und Satz III.1.11])**.**

(i) Für $1 \leq p < \infty$ ist i ein isometrischer Isomorphismus.

(ii) $i : l^1 \to (l^\infty)'$ ist nicht surjektiv.

(iii) $i : l^1 \to (c_0)'$ ist ein isometrischers Isomorphismus.

Definition 16.2.7. Ein Banachraum X heißt *reflexiv*, falls $j_X : X \to X''$ surjektiv ist (also ein isometrischer Isomorphismus).

Satz 16.2.8 ([W, Satz III.1.12])**.** Sei X ein normierter Raum. Ist X' separabel, so ist auch X separabel.

Definition 16.2.9. Sei X ein normierter Raum, und $A \subset X$, $B \subset X'$ Teilmengen.

(i) Der *Annihilator von A in X'* ist

$$A^\perp \ := \ \{\varphi \in X' \,\big|\, \varphi(x) = 0 \text{ für all } x \in A\,\}$$

(ii) Der *Annihilator von B in X* ist

$$B_\perp \ := \ \{x \in X \,\big|\, \varphi(x) = 0 \text{ für all } \varphi \in B\,\}$$

Lemma 16.2.10 ([W, Satz III.1.10])**.** Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es kanonische isometrische Isomorphismen

$$(X/U)' \ \cong \ U^\perp \quad , \quad U' \ \cong \ X'/U^\perp \ .$$

16.3 Der Satz von Baire und gleichmäßige Beschränktheit

Satz 16.3.1 ([W, Satz IV.1.1])**.** (Satz von Baire)
Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie offener und dichter Teilmengen von M. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in M.

■ Ein *innerer Punkt* in einer Teilmenge A eines metrischen Raumes M ist ein Punkt $p \in A$, sodass auch eine offene Umgebung von p ganz in A liegt. Z.B. ist A genau dann offen, wenn jeder Punkt ein innerer Punkt ist.

Korollar 16.3.2. Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von M. Angenommen, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ enthält einen inneren Punkt. Dann gibt es ein n, sodass A_n einen inneren Punkt enthält.

Definition 16.3.3. Sei M eine Menge und F eine Menge von Funktionen $M \to \mathbb{R}$. F heißt *punktweise gleichmäßig beschränkt*, falls es für jedes $x \in M$ ein $K_x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt

$$\forall f \in F \;:\; f(x) \leq K_x \;.$$

Satz 16.3.4 ([HS, Satz 4.4])**.** Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $F \subset C(M, \mathbb{R})$ punktweise gleichmäßig beschränkt. Dann gibt es einen offenen Ball B in M und eine Konstante C mit

$$\forall f \in F, x \in B \;:\; f(x) \leq C \;.$$

Satz 16.3.5 ([HS, Satz 8.1])**.** Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $E \subset L(X, Y)$ eine Teilmenge, sodass $\{x \mapsto \|Tx\| \,|\, T \in E\}$ punktweise gleichmäßig beschränkt ist. Dann gibt es eine Konstante C, sodass:

$$\forall T \in E \;:\; \|T\| \leq C \;.$$

Korollar 16.3.6 ([HS, Kor. 8.2])**.** Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Es sind äquivalent:

(i) M ist beschränkt.

(ii) Für alle $\varphi \in X'$ gibt es ein k_φ mit

$$|\varphi(x)| \leq k_\varphi \text{ für alle } x \in M \;.$$

Korollar 16.3.7 ([HS, Kor. 8.3])**.** Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $E \subset L(X, Y)$ eine Teilmenge, sodass gilt: Für alle $\varphi \in Y'$ und $x \in X$ gibt es ein $k_{\varphi,x}$, sodass

$$|\varphi(Tx)| \leq k_{\varphi,x} \text{ für alle } T \in E \;.$$

Dann gibt es ein C, sodass

$$\|T\| \leq C \text{ für alle } T \in E \;.$$

Korollar 16.3.8 ([W, Kor. IV.2.5])**.** Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $T_n \in L(X, Y)$. Angenommen, für jedes x existiert $Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x$. Dann $T \in L(X, Y)$.

16.4 Offenen Abbildungen

■ Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (oder allgemeiner topologischen Räumen) heißt *offen*, falls Bilder offener Mengen offen sind.

Lemma 16.4.1 ([W, Lem. IV.3.2])**.** Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X, Y)$. Es sind äquivalent:

(i) T ist offen.

(ii) 0 ist innerer Punkt von $T\big(B_{<1,X}(0)\big)$.

Satz 16.4.2 ([W, Satz IV.3.3])**.** (Satz von der offenen Abbildung)
Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.

Korollar 16.4.3 ([W, Kor. IV.3.4])**.** (Satz vom inversen Operator)
Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$ bijektiv. Dann ist T^{-1} stetig, d.h. T ist ein Isomorphismus.

Korollar 16.4.4 ([W, Kor. IV.3.5])**.** Sei X ein Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X, die jeweils X zu einem Banachraum machen. Angenommen, $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$ für ein $M > 0$ und alle $x \in X$. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

Korollar 16.4.5. Sei X ein Banachraum und $U, V \subset X$ seien abgeschlossene Unterräume mit $U \cap V = \{0\}$ und $U + V = X$. Dann ist $U \oplus V \to X$, $(u, v) \mapsto u + v$ ein Isomorphismus.

16.5 Abgeschlossene Graphen

■ Seien X, Y normierte Räume, $D \subset X$ ein Untervektorraum und $T : D \to Y$ linear. Den Definitionsbereich D von T nennen wir auch $\mathrm{dom}(T)$ („domain“) und schreiben abkürzend

$$T : X \supset D \to Y \quad \text{oder} \quad T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y \ .$$

(Mit $\mathrm{dom}(T)$ immer ein Untervektorraum gemeint).

■ Der *Graph von T* ist

$$\mathrm{gr(T)} \ = \ \big\{ \, (x, Tx) \, \big| \, x \in \mathrm{dom}(T) \, \big\} \ \subset \ X \oplus Y \ .$$

Definition 16.5.1. Seien X, Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathrm{gr}(T)$ in $X \oplus Y$ abgeschlossen ist.

Lemma 16.5.2 ([W, Lem. IV.4.2])**.** Seien X, Y normierte Räume und $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ linear. Es sind äquivalent:

(i) T ist abgeschlossen.

(ii) Sei (x_n) eine Folge in $\mathrm{dom}(T)$. Angenommen $x_n \to x$ für ein $x \in X$ und $Tx_n \to y$ für ein $y \in Y$. Dann gilt $x \in \mathrm{dom}(T)$ und $y = Tx$.

Korollar 16.5.3. Seien X, Y normierte Räume und $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ linear. Falls T stetig ist und $\mathrm{dom}(T)$ abgeschlossen ist, so ist T abgeschlossen.

Lemma 16.5.4 ([W, Lem. IV.4.3])**.** Seien X, Y Banachräume und $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ linear und abgeschlossen. Dann gilt

(i) $\mathrm{gr}(T)$ ist ein Banachraum, und die Abbildung $\tilde{T} : \mathrm{gr}(T) \to Y$, $(x, y) \mapsto y = Tx$ ist stetig.

(ii) $\mathrm{dom}(T)$ mit der Norm $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ ist ein Banachraum, und T ist stetig als Abbildung von $(\mathrm{dom}(T), \|\cdot\|)_T)$ nach Y.

Satz 16.5.5 ([W, Satz IV.4.4])**.** Seien X, Y Banachräume und $T : X \supset \mathrm{dom}(T) \to Y$ linear und abgeschlossen.

(i) Ist T surjektiv, so ist T offen.

(ii) Ist T bijektiv, so ist T^{-1} stetig.

Satz 16.5.6 ([W, Thm. IV.4.5])**.** (Satz vom abgeschlossenen Graphen) Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear und abgeschlossen. Dann ist T stetig.

16.6 Differentiation nichtlinearer Abbildungen

In diesem Unterkapitel ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 16.6.1 ([W, Def. III.5.1])**.** Seien X, Y normierte Räume, $U \subset X$ offen und $f : U \to Y$ eine Abbildung.

(i) f hießt *Gâteaux-differenzierbar bei* $p \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T \in L(X, Y)$ existiert, sodass für alle $v \in X$ gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h} \;=\; Tv \;.$$

Wir schreiben in diesem Fall auch $Df(p)$ statt T und nennen diesen Operator die *Gâteaux-Ableitung von f in p*.

(ii) f heißt *Fréchet-differenzierbar bei* $p \in U$, wenn es ein $T \in L(X,Y)$ gibt, sodass
$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - Tv}{\|v\|} \;=\; 0\ .$$
$Df(p) = T$ heißt in diesem Fall die *Fréchet-Ableitung von* f *in* p.

(iii) Falls f in jedem $p \in U$ Gâteaux/Fréchet-differenzierbar ist, so sagen wir f *ist Gâteaux/Fréchet-differenzierbar*. Die Funktion
$$Df : U \to L(X,Y) \quad , \quad x \mapsto Df(x)\ ,$$
heißt die *Gâteaux/Fréchet-Ableitung von* f.

Satz 16.6.2 ([W, Satz III.5.4])**.** Seien X, Y, Z normierte Räume, und $U \subset X$, $V \subset Y$ offen. Es gilt:

(i) Sind $f, g : U \to Y$ Gâteaux/Fréchet-differenzierbar in p, so auch $\alpha f + \beta g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und es gilt
$$D(\alpha f + \beta g)(p) \;=\; \alpha Df(p) + \beta Dg(p)\ .$$

(ii) *(Schrankensatz)* Angenommen, $f : U \to Y$ ist Gâteaux-differenzierbar. Seien $x_0, x_1 \in U$, sodass die Verbindungsstrecke $I = \{(1-t)x_0 + tx_1 \mid t \in [0,1]\}$ ebenfalls in U liegt. Setze $M = \sup_{\xi \in I} \|Df(\xi)\|$. Dann
$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \;\leq\; M\,\|x_1 - x_0\|\ .$$

(iii) Angenommen, $f : U \to Y$ ist Gâteaux-differenzierbar, und die Funktion $Df : U \to L(X,Y)$ ist stetig. Dann ist f auf U Fréchet-differenzierbar.

(iv) *(Kettenregel)* Sei $f : U \to Y$ und $g : V \to Z$ gegeben mit $f(U) \subset V$. Angenommen, f ist in $p \in U$ Fréchet-differenzierbar, und g ist in $f(p) \in V$ Fréchet-differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in $p \in U$ Fréchet-differenzierbar mit
$$D(g \circ f)(p) \;=\; Dg(f(p) \circ Df(p)\ .$$

■ Im Fall (iii) sagen wir, f ist *stetig differenzierbar* und schreiben $f \in C^1(U,Y)$.

■ Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ besitzt in $p \in U$ ein *lokales Extremum*, falls es eine Umgebung von $p \in U$ gibt, auf der entweder überall $f(x) \geq f(p)$ gilt, oder überall $f(x) \leq f(p)$.

Lemma 16.6.3 ([W, Satz III.5.6])**.** Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar. Besitzt f in p ein lokales Extremum, so gilt $Df(p) = 0$.

17 Schwache Topologie, gleichmäßige Konvexität

17.1 Schwache Topologien und reflexive Räume

Definition 17.1.1. Sei X ein normierter Raum.

(i) Eine Folge (x_n) in X heißt *schwach konvergent gegen* x, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \;=\; \varphi(x) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in X' \ .$$

Wir schreiben

$$x_n \xrightarrow{\sigma} x \quad \text{oder} \quad \sigma\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \ .$$

(ii) Eine Folge (φ_n) in X' heißt *schwach* konvergent gegen* φ, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \;=\; \varphi(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \ .$$

Wir schreiben

$$\varphi_n \xrightarrow{\sigma*} \varphi \quad \text{oder} \quad \sigma{*}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \ .$$

■ Konvexe Mengen und konvexe Hüllen wurden vor Lemma 16.1.6 eingeführt.

Lemma 17.1.2 ([W, Satz III.3.8])**.** Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge. Dann gilt für jede schwach konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in M$ und $x_n \xrightarrow{\sigma} x$, dass $x \in M$.

Korollar 17.1.3 ([W, Kor. III.3.9])**.** Gilt $x_n \xrightarrow{\sigma} x$, so gibt es eine Folge von Konvexkombinationen

$$y_n = \sum_{i=1}^{N(n)} \lambda(n)_i \, x_i \quad , \quad \text{wobei} \;\; \lambda(n)_i \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{N(n)} \lambda(n)_i = 1 \ ,$$

sodass $y_n \to x$ (Norm-Konvergenz).

Lemma 17.1.4. Sei X ein normierter Raum. Eine schwach konvergente Folge in X ist beschränkt.

Lemma 17.1.5. Sei X ein Banachraum. Eine schwach* konvergente Folge in X' ist beschränkt.

Satz 17.1.6. Sei X ein separabler Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge in X' eine schwach* konvergente Teilfolge.

Satz 17.1.7. Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.

Ausblick:

■ Ein *topologischer Raum* ist eine Menge M zusammen mit einer Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge $P(M)$, sodass

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $M \in \mathcal{T}$,

(ii) $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen bezüglich endlicher Durchschnitte,

$$U, V \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{T} \ .$$

(iii) $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen bezüglich beliebiger Vereinigungen,

$$A \subset \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{U \in A} U \ \in \ \mathcal{T} \ .$$

Man nennt $\mathcal{T}$ eine *Topologie auf* M. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen.*

■ Sind M, N topologische Räume, so heißt eine Funktion $f : M \to N$ stetig, wenn Urbilder von offenen Mengen offen sind.

■ Sei $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Topologien auf M. Dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie auf M.

Für eine beliebige Teilmenge $A \subset P(M)$ ist die *von* A *erzeugte Topologie* $\mathcal{T}(A)$ *auf* M der Durchschnitt aller Topologien auf M, die A enthalten.

Definition 17.1.8. Sei X ein normierter Raum.

(i) Sei $W = \left\{ \varphi^{-1}(U) \,\middle|\, \varphi \in X' \, , \, U \subset \mathbb{K} \text{ offen} \right\} \subset P(X)$. Man nennt $\mathcal{T}(W)$ die *schwache Topologie auf* X.

(ii) Sie $j : X \to X''$ die kanonische Isometrie in den Bidualraum von X und $W^* = \left\{ j(x)^{-1}(U) \,\middle|\, x \in X \, , \, U \subset \mathbb{K} \text{ offen} \right\} \subset P(X')$. Man nennt $\mathcal{T}(W^*)$ die *schwach* Topologie auf* X'.

Lemma 17.1.9. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, X ein normierter Raum, und $f : M \to X$ eine Abbildung. Es sind äquivalent:

(i) f ist schwach-stetig (d.h. stetig bzgl. der schwachen Topologie auf X).

(ii) $\varphi \circ f : M \to \mathbb{K}$ ist für alle $\varphi \in X'$ stetig.

■ Genauso sieht man: $f : M \to X'$ schwach*-stetig genau dann, wenn $f(\cdot)(x) : M \to \mathbb{K}$ für alle $x \in X$ stetig ist.

Satz 17.1.10. Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear. Es sind äquivalent:

(i) T ist (Norm-)stetig.

(ii) T ist schwach-schwach stetig (also stetig bezüglich der schwachen Topologien auf X und auf Y).

17.2 Gleichmäßige Konvexität und Reflexivität

Definition 17.2.1 ([W, Def. IV.7.9] und [HS, Def. 16.1]). Ein normierter Raum X heißt *gleichmäßig konvex*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in B_{\leq 1,X}$ gilt:

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \ .$$

Satz 17.2.2 ([HS, Satz 16.4]). (Approximationssatz)
Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Sei $K \subset X$, $K \neq \emptyset$, eine abgeschlossene konvexe Teilmenge, und sei $a \in X$ beliebig. Dann gibt es ein eindeutiges $p \in K$ mit minimalem Abstand zu a unter allen Elementen von K:

$$\exists! p \in K \ : \ \|p - a\| \ = \ \inf_{x \in K} \|x - a\| \ .$$

Lemma 17.2.3. Sei X ein normierter Raum. Es sind äquivalent:

(i) X ist gleichmäßig konvex.

(ii) Seien (x_n) und (y_n) Folgen in X mit

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq 1$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\tfrac{1}{2}(x_n + y_n)\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0 \ .$$

Lemma 17.2.4. Sei X ein gleichmäßig konvexer normierter Raum. Sei (x_n) eine Folge in X mit

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \lim_{m,n\to\infty} \|\tfrac{1}{2}(x_m + x_n)\| = 1$$

Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge und es gilt $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$.

Satz 17.2.5 ([HS, Satz 18.1])**.** (Satz von Milman)
Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.

Lemma 17.2.6 ([HS, Lem. 14.5])**.** Sei X ein Banachraum, $G \in X''$ mit $\|G\| \leq 1$, und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X'$. Setze $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \left|G(\varphi_i) - \varphi_i(x)\right|^2$. Dann gilt

$$\inf \left\{ h(x) \,\middle|\, x \in B_{\leq 1,X} \right\} \;=\; 0\ .$$

Korollar 17.2.7. Sei X ein Banachraum und $j_X : X \to X''$ die kanonische Isometrie. Dann ist $j_X(B_{\leq 1,X})$ schwach*-dicht in $B_{\leq 1,X''}$.

17.3 L^p ist gleichmäßig konvex

Satz 17.3.1 ([W, Satz IV.7.11])**.** Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex.

Korollar 17.3.2. Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.

Lemma 17.3.3 ([W, Lem. IV.7.10])**.** Sei $1 < p < \infty$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\tau_\varepsilon > 0$, sodass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ mit $|w|, |z| \leq 1$ und $|w - z| \geq \varepsilon$ gilt

$$\left| \tfrac{1}{2}\,(w + z) \right|^p \;\leq\; (1 - \tau_\varepsilon)\,\tfrac{1}{2}\left(|w|^p + |z|^p\right)\ .$$

■ In Satz 15.5.9 wurde die Isometrie $i_{q \to p} : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ eingeführt.

Satz 17.3.4 ([HS, Satz 19.1])**.** Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist

$$i_{q \to p} \;:\; L^q(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))'$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Korollar 17.3.5. Sei X ein endlich-dimensionaler normierter Raum. Jedes $T \in L(L^p(\Omega), X)$ ist von der Form

$$T(f) \;=\; \int_\Omega h_T\, f\, d\mu$$

für ein $h_T : \Omega \to X$, sodass die Komponentenfunktionen bezüglich einer (dann jeder) Basis in $L^q(\Omega)$ liegen.

18 Hilberträume

18.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 18.1.1 ([HS, Def. 20.1])**.** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Eine *hermitesche Form auf* X ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \; : \; X \times X \to \mathbb{K} \; ,$$

sodass für all $x, x', y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$

(b) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(ii) Eine hermitesche Form heißt *positiv semi-definit*, falls $\langle x, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in X$. Sie heißt *positiv definit*, falls $\langle x, x \rangle = 0$ impliziert, dass $x = 0$.

(iii) Ein *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*) auf X ist eine positiv definite hermitesche Form.

Lemma 18.1.2 ([HS, Satz 20.3])**.** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine positiv semi-definite hermitesche Form auf X. Dann gilt für alle $x, y \in X$

$$\big| \langle x, y \rangle \big|^2 \; \leq \; \langle x, x \rangle \, \langle y, y \rangle \; .$$

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit, so gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Satz 18.1.3 ([HS, Satz 20.4])**.** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X. Dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf X.

■ Wir nennen $\| \cdot \|$ auch die durch das Skalarprodukt *induzierte Norm*. Topologische Eigenschaften werden im Folgenden bezüglich der induzierten Norm betrachtet.

Definition 18.1.4 ([W, Def. V.1.4])**.** Ein normierter Raum $(X, \| \cdot \|)$ heißt *Prä-Hilbertraum*, falls es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf X gibt, sodass $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Ein *Hilbertraum* ist ein vollständiger Prä-Hilbertraum.

Lemma 18.1.5 ([HS, Satz 20.5])**.** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ ist bezüglich der induzierten Norm stetig.

Satz 18.1.6 ([HS, Satz 20.6])**.** (Parallelogrammgleichung)
Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prä-Hilbertraum, wenn für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \;.$$

Korollar 18.1.7 ([W, Satz V.1.8])**.** Die Vervollständigung eines Prä-Hilbertraumes ist ein Hilbertraum.

Korollar 18.1.8. Ein Prä-Hilbertraum ist gleichmäßig konvex.

■ Seien X, Y $\mathbb{C}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *antilinear*, falls für alle $x, x' \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$f(x+x') = f(x) + f(x') \;\text{ und }\; f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x) \;.$$

■ Sei X ein Hilbertraum. Für $x \in X$ sei $i(x) : X \to \mathbb{K}$ die Abbildung $y \mapsto \langle y, x\rangle$.

Satz 18.1.9. Sei X ein Hilbertraum.

(i) $i : X \to X'$ und $\|i(x)\| = \|x\|$.

(ii) i ist antilinear und bijektiv.

18.2 Orthonormale Basen

Definition 18.2.1 ([W, Def. V.3.1])**.** Sei X ein Prä-Hilbertraum.

(i) $x, y \in X$ hießen *orthogonal*, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Wir schreiben auch $x \perp y$.

(ii) Zwei Teilmengen $A, B \subset X$ heißen *orthogonal*, falls für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt: $a \perp b$.

(iii) Das *orthogonale Komplement* $A^\perp$ einer Teilmenge $A \subset X$ ist

$$A^\perp \;:=\; \{x \in X \,|\, x \perp a \text{ für alle } a \in A\} \;.$$

Lemma 18.2.2 ([W, Satz V.3.2])**.** Sei X ein Hilbertraum und $K \subset X$, $K \neq \emptyset$, abgeschlossen und konvex. Für jedes $x \in X$ existiert genau ein $k \in K$, sodass

$$\|x-k\| \;=\; \inf_{y\in K} \|x-y\| \;.$$

■ Für zwei normierte Räume U, V ist $U \oplus_2 V$ die (äußere) direkte Summe mit Norm $\|(u,v)\|_2 := \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$. Sind U, V Prä-Hilberträume, so ist auch $U \oplus_2 V$ ein Prä-Hilbertraum.

■ Für eine lineare Abbildung $f : A \to B$ schreiben wir auch $\operatorname{ran}(f) \subset B$ für das Bild von f.

■ Ein $P \in L(X, X)$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$.

Satz 18.2.3 ([W, Satz V.3.2])**.** (Satz von der Orthogonalprojektion)
Sei X ein Hilbertraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum.

(i) Es gibt genau eine Projektion $P \in L(X, X)$ mit Bild U und Kern $U^\perp$.

(ii) Falls $U \neq \{0\}$, so gilt $\|P\| = 1$. Falls $U \neq X$, so gilt $\|\operatorname{id} - P\| = 1$.

(iii) X ist kanonisch isometrisch isomorph zu $U \oplus_2 U^\perp$.

■ Ein P wie im obigen Satz nennen wir die *orthogonale Projektion auf* U.

Definition 18.2.4 ([HS, Def. 21.4])**.** Eine Familie $\{x_i\}_{i \in I}$ von Elementen aus einem Prä-Hilbertraum X heißt *summierbar zu* x, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $J_\varepsilon \subset I$ gibt, sodass für alle endlichen J mit $J_\varepsilon \subset J \subset I$ gilt

$$\Big\| x - \sum_{j \in J} x_j \Big\| < \varepsilon \ .$$

■ Im Folgenden ist immer I die (möglicherweise unendliche) Indexmenge und J, J_ε, J_0, J_1, $\ldots$ bezeichnen endliche Teilmengen von I.

Lemma 18.2.5 ([HS, Lem. 21.5])**.** Sei $\{x_i\}_{i \in I}$ eine Familie in einem Hilbertraum X.

(i) $\{x_i\}_{i \in I}$ ist genau dann zu einem x summierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein J_ε gibt, sodass für alle J mit $J \cap J_\varepsilon = \emptyset$ gilt

$$\Big\| \sum_{j \in J} x_j \Big\| < \varepsilon \ .$$

(ii) $\{x_i\}_{i \in I}$ ist genau dann zu x summierbar, wenn höchstens abzählbar viele x_i ungleich Null sind und wenn für jede Abzählung $x_1, x_2, \ldots$ diese x_i gilt:

$$x \ = \ \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Lemma 18.2.6 ([HS, Lem. 21.6])**.** Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ und $\{y_i\}_{i\in I}$ summierbare Familien in einem Hilbertraum X, und $\lambda \in \mathbb{K}$, $z \in X$. Dann gilt:

(i) $\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I}(x_i + y_i)$ und $\lambda \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} \lambda x_i$.

(ii) $\big\langle \sum_{i\in I} x_i, z\big\rangle = \sum_{i\in I} \big\langle x_i, z\big\rangle$, insbesondere ist die rechte Seite summierbar.

Definition 18.2.7. Eine Familie $\{x_i\}_{i\in I}$ in einem Prä-Hilbertraum X heißt

(i) *orthogonal* oder *Orthogonalsystem*, falls $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$.

(ii) *orthonormal* oder *Orthonormalsystem*, falls sie ein orthogonal ist, und falls $\|x_i\| = 1$ für alle $i \in I$.

Lemma 18.2.8 ([HS, Lem. 21.7])**.** Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ ein Orthogonalsystem in einem Hilbertraum X. Es sind äquivalent:

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist summierbar.

(ii) $\{\|x_i\|^2\}_{i\in I}$ ist in $\mathbb{R}$ summierbar.

In diesem Fall gilt $\| \sum_{i\in I} x_i\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2$.

Satz 18.2.9 ([HS, Satz 21.8])**.** Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum X, und sei $x \in X$. Dann gilt:

(i) *(Besselsche Ungleichung)* $\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(ii) „=“ gilt in (i) genau dann, wenn $x = \sum_{i\in I}\langle x, x_i\rangle x_i$.

(Die Summierbarkeit ist hier jeweils Teil der Aussage.)

■ Wir nennen ein Orthonormalsystem $\{x_i\}_{i\in I}$ in X *maximal* oder *vollständig*, falls gilt: Sei $\{y_k\}_{k\in K}$ ein Orthonormalsystem, das jedes x_i enthält. Dann sind $\{x_i\}$ und $\{y_k\}$ als Mengen gleich.
(„Man kann $\{x_i\}_{i\in I}$ nicht größer machen.“)

Satz 18.2.10 ([HS, Satz 21.9])**.** Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum X. Es sind äquivalent:

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist maximal.

(ii) Gilt $x \perp x_i$ für alle $i \in I$, so ist $x = 0$.

(iii) X ist isometrisch isomorph zu $l^2(I)$ via $x_i \mapsto e_i$.

(iv) Für alle $x \in X$ gilt $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$ *(Fourier-Entwicklung).*

(v) Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, y \rangle$.

(vi) Für alle $x \in X$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$ *(Parsevalsche Gleichung).*

Definition 18.2.11. Ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum, dass eine der Bedingungen in Satz 18.2.10 erfüllt, heißt *Hilbert-Basis* oder *Orthonormalbasis* oder *ON-Basis*.

Satz 18.2.12 ([W, Satz V.4.9, Lem. V.4.11])**.**

(i) Sei $\{x_i\}_{i \in I}$ ein ON-System in einem Hilbertraum X. Dann gibt es eine ON-Basis von X, die $\{x_i\}_{i \in I}$ enthält.

(ii) Seien A, B zwei Mengen. Es sind äquivalent:

  (a) Es gibt eine Bijektion zwischen A und B, d.h. A und B sind gleichmächtig.

  (b) Es gibt einen isometrischen Isomorphismus $l^2(A) \cong l^2(B)$.

18.3 Operatoren

■ In diesem Abschnitt sind X, Y Hilberträume.

■ In Satz 18.1.9 wurde der isometrische Antiisomorphismus $i_X : X \to X'$ eingeführt.

Definition 18.3.1. Sei $T \in L(X, Y)$. Der *zu T adjungierte Operator T^** $\in L(Y, X)$ ist definiert durch das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{T^*} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i_Y} & & \downarrow{\scriptstyle i_X} \\ Y' & \xrightarrow{T'} & X' \end{array}$$

Lemma 18.3.2 ([W, Satz V.5.2])**.** Sei $S \in L(X, Y)$. Es gilt

(i) $\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2$

(ii) $\ker S = (\operatorname{ran} S^*)^\perp$ und $\ker S^* = (\operatorname{ran} S)^\perp$

Definition 18.3.3. Sei $T \in L(X, Y)$. T heißt

(i) *unitär*, falls $T^* = T^{-1}$,

(ii) *selbstadjungiert*, falls $X = Y$ und $T^* = T$,

(iii) *normal*, falls $X = Y$ und $TT^* = T^*T$.

Satz 18.3.4 ([W, Satz V.5.5])**.** (Satz von Hellinger-Toeplitz)
Sei $T : X \to X$ linear, sodass für alle $x, y \in X$ gilt: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. Dann ist T stetig (also selbstadjungiert).

Lemma 18.3.5 ([W, Satz V.5.6])**.** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist $T \in L(X)$ genau dann selbstadjungiert, wenn gilt: $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X$.

Lemma 18.3.6 ([W, Satz V.5.7])**.** Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Dann

$$\|T\| \;=\; \sup_{\|x\|\le 1} \big|\,\langle Tx, x\rangle\,\big|\,.$$

Korollar 18.3.7 ([W, Kor. V.5.8])**.** $T \in L(X)$ erfülle $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in X$. Dann gilt:

(i) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $T = 0$.

(ii) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und T selbstadjungiert, so ist $T = 0$.

■ Aus Satz 18.2.3: Ein $P \in L(X)$ heißt *Orthogonal-Projektion*, falls gilt $P^2 = P$ und $\operatorname{ran}(P) \perp \ker(P)$.

Satz 18.3.8 ([W, Satz V.5.9])**.** Sei $P \in L(X)$ mit $P^2 = P$ (d.h. P ist eine Projektion) und $P \neq 0$. Es sind äquivalent:

(i) P ist eine Orthogonal-Projektion.

(ii) $\|P\| = 1$.

(iii) P ist selbstadjungiert.

(iv) P ist normal.

(v) $\langle Px, x\rangle \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ für alle $x \in X$.

18.4 Fouriertransformation und Schwartz-Räume

■ Für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir abkürzend $x\xi = \langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Definition 18.4.1 ([W, Def. V.2.1])**.** Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ setze

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ heißt *Fouriertransformierte von* f, und die Abbildung $\mathcal{F}$ heißt *Fouriertransformation.*

■ Der Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, die im Unendlichen verschwinden in dem Sinne, dass $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$. Mit der sup-Norm wird $C_0(\mathbb{R}^n)$ zu einem Banachraum.

Satz 18.4.2 ([W, Def. V.2.1])**.** $\mathcal{F}$ ist ein stetiger linearer Operator $L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\mathcal{F}\| \leq (2\pi)^{-n/2}$.

■ Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0})$, sodass

- $\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}} \subset B_{\leq 1,\mathbb{R}^n}$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$

Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Dann

- $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_{\leq \varepsilon,\mathbb{R}^n}$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$

Satz 18.4.3. (Friedrichssche Glättungsoperator)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, und $x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Die Funktion $\Omega \to \mathbb{C}$, $y \mapsto f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)$ ist in $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

Setze $(G_\varepsilon f)(x) = \int_\Omega f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy$.

(ii) $G_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(iii) Für die Einschränkung von $G_\varepsilon f$ auf Ω gilt $\|G_\varepsilon f\|_p \leq \|f\|_p$. Insbesondere ist $G_\varepsilon f \in L^p(\Omega)$.

(iv) $G_\varepsilon \in L(L^p(\Omega))$ und $\|G_\varepsilon\| \leq 1$.

(v) $\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon f = f$ in $L^p(\Omega)$.

■ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen

$$\mathcal{D}(\Omega) \;=\; \left\{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \,\middle|\, \operatorname{supp}(\varphi) \text{ ist kompakt und in } \Omega \text{ enthalten } \right\} .$$

Elemente von $\mathcal{D}(\Omega)$ heißen auch *Testfunktionen.*

Lemma 18.4.4 ([W, Lem. V.1.10])**.** $\mathcal{D}(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

■ Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ (ein *Multiindex*) schreiben wir

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} .$$

Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ oft genug differenzierbar schreiben wir

$$(D^\alpha f)(x) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} f(x_1, \ldots, x_n) .$$

Definition 18.4.5 ([W, Def. V.2.3]).

(i) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls für alle $\alpha \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ gilt

$$\lim_{\|x\|\to\infty} x^\alpha f(x) \;=\; 0 \;.$$

(ii) Der *Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;=\; \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, D^\alpha f \text{ ist schnell fallend für alle } \alpha \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \right\} .$$

Satz 18.4.6 ([W, Satz V.2.8]). Die Fouriertransformation ist ein isometrischer Isomorphismus $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der L^2-Norm. Es gilt $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$.

Lemma 18.4.7 ([W, Lem. V.2.4]). Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und α ein Multiindex. Dann gilt:

(i) $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii) $D^\alpha(\mathcal{F}f) \;=\; (-i)^{|\alpha|}\,\mathcal{F}(x^\alpha f)$

(iii) $\xi^\alpha(\mathcal{F}f) \;=\; (-i)^{|\alpha|}\,\mathcal{F}(D^\alpha f)$

(iv) Für $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{F}(e^{ix\xi_0} f) = (\mathcal{F}f)(\xi - \xi_0)$

Lemma 18.4.8 ([W, Lem. V.2.5]). Wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann auch $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

■ Für $a > 0$ sei $\gamma_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\gamma_a(x) = \exp(-\frac{1}{2}\,(ax)^2\,)$, wobei $x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Lemma 18.4.9 ([W, Lem. V.2.6]). Es gilt $\mathcal{F}\gamma_a = a^{-n}\,\gamma_{1/a}$.

Lemma 18.4.10 ([W, Lem. V.2.7]). Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$.

■ $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet die eindeutige stetige Fortsetzung von $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 18.4.11 ([W, Satz V.2.9]).

(i) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathcal{F}_2(f) = \mathcal{F}(f)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (also fast überall als Funktionen auf $\mathbb{R}^n$)

(ii) Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{F}_2(f) \;=\; \lim_{R\to\infty} \mathcal{F}(\chi_{B_{\leq R}} f) \;,$$

wobei hier der Grenzwert in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gemeint ist (also bzgl. $\|\cdot\|_2$).

19 Spektraltheorie und kompakte Operatoren

19.1 Spektrum eines stetigen Operators

■ In diesem Abschnitt bezeichnet X einen $\mathbb{K}$-Banachraum und T einen stetigen linearen Operator $X \to X$.

Definition 19.1.1 ([W, Def. VI.1.1])**.**

(i) Die *Resolventenmenge von T* ist

$$\rho(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \,\middle|\, \lambda \operatorname{id} - T \text{ ist bijektiv} \right\}$$

(Nach dem Satz vom inversion Operator (Korollar 16.4.3) ist $(\lambda \operatorname{id} - T)^{-1}$ stetig, falls $\lambda \operatorname{id} - T$ bijektiv ist.)

(ii) Die Abbildung

$$R \equiv R(T) : \rho(T) \to L(X) \quad , \quad \lambda \mapsto R_\lambda := (\lambda \operatorname{id} - T)^{-1}$$

heißt *Resolventenabbildung*.

(iii) Das *Spektrum von T* ist

$$\sigma(T) \;=\; \mathbb{K} \setminus \rho(T) \;=\; \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \,\middle|\, \lambda \operatorname{id} - T \text{ ist nicht bijektiv} \right\} .$$

Lemma 19.1.2 ([HS, Lem. 23.2])**.** Seien X, Y Banachräume und $A, B \in L(X, Y)$ mit A bijektiv. Es gelte $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Dann ist B bijektiv.

Korollar 19.1.3 ([HS, Kor. 23.3])**.** Die Resolventenmenge $\rho(T) \subset \mathbb{K}$ ist offen.

Satz 19.1.4. Die Resolventenabbildung $R : \rho(T) \to L(X)$, $\lambda \mapsto R_\lambda$ ist analytisch, d.h. sie ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten in $L(X)$ gegeben.

Satz 19.1.5 ([W, Satz VI.1.3])**.**

(i) $\sigma(T)$ ist kompakt und es gilt $|\lambda| \leq \|T\|$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$.

(ii) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $\sigma(T)$ nicht leer.

■ Man definiert die folgende disjunkte Zerlegung des Spektrums: $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ mit

- *(Punktspektrum)*

$$\sigma_p(T) \;:=\; \{\lambda \,|\, \lambda - T \text{ nicht injektiv}\,\}$$

- *(stetiges Spektrum)*

$$\sigma_c(T) \;:=\; \{\lambda \,|\, \lambda - T \text{ injektiv, nicht surjektiv, dichtes Bild}\,\}$$

- *(Restspektrum)*

$$\sigma_r(T) \;:=\; \{\lambda \,|\, \lambda - T \text{ injektiv, nicht surjektiv, Bild nicht dicht}\,\}$$

19.2 Kompakte Operatoren

■ Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes M heißt *relativ-kompakt*, falls ihr Abschluss $\overline{U} \subset M$ kompakt ist.

Definition 19.2.1 ([W, Def. II.3.1])**.** Seien X, Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt *kompakt*, falls $T(B_{<1,X})$ in Y relativ-kompakt ist. Die Teilmenge der kompakten linearen Abbildungen wird mit $K(X, Y)$ bezeichnet.

■ Ein metrischer Raum M heißt *totalbeschränkt*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $p_1, \ldots, p_n \in M$ gibt, sodass $M = \bigcup_{i=1}^n B_{<\varepsilon}(p_i)$.

Lemma 19.2.2 ([W, Satz B.1.7])**.** Für einen metrischen Raum M sind äquivalent:

(i) M ist kompakt (im Sinne von überdeckungskompakt).

(ii) M ist folgenkompakt (d.h. jede Folge hat eine konvergente Teilfolge).

(iii) M ist totalbeschränkt und vollständig.

Satz 19.2.3 ([HS, Lem. 24.3])**.** Seien X, Y Banachräume. $K(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $L(X, Y)$.

Korollar 19.2.4. Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Angenommen, es gibt eine Folge $(T_n)_n$ in $L(X, Y)$, sodass

(i) $T_n \to T$ (in der Operatornorm),

(ii) jedes T_n hat endlich-dimensionales Bild.

Dann ist T kompakt.

Satz 19.2.5 ([W, II.3.4])**.** (Satz von Arzelà-Ascoli)
Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $F \subset (C(M), \|\cdot\|_\infty)$, sodass

(i) F ist beschränkt.

(ii) F ist abgeschlossen.

(iii) F ist gleichgradig stetig, d.h.:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in F \;:\; d(a,b) \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon \;,$$

Dann ist F kompakt.

19.3 Der Satz von Riesz und Fredholm-Operatoren

■ In diesem Abschnitt bezeichnen X, Y Banachräume (über $\mathbb{K}$).

Lemma 19.3.1. Sei $T : X \to Y$ linear. Es sind äquivalent:

(i) T ist kompakt.

(ii) Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 19.3.2 ([W, Satz III.4.4])**.** (Satz von Schauder)
Sei $T \in L(X, Y)$. Dann ist T genau dann kompakt, wenn T' kompakt ist.

Satz 19.3.3 ([HS, Satz 24.6])**.** (Satz von Riesz)
Sei $T \in K(X)$ und $S = \mathrm{id} - T$. Dann gilt:

(i) $\ker(S)$ ist endlich-dimensional,

(ii) $\mathrm{ran}(S)$ ist abgeschlossen,

(iii) $X/\mathrm{ran}(S)$ ist endlich-dimensional.

Lemma 19.3.4 ([HS, Lem. 24.7 und 24.8])**.** Sei Z ein normierter Raum und $U \subset Z$ ein abgeschlossener Unterraum. Angenommen, eine der folgenden Bedingungen ist erfüllt:

(i) U ist endlich-dimensional.

(ii) Z/U ist endlich-dimensional.

Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $V \subset Z$, sodass $U \oplus V = Z$.

Definition 19.3.5 ([HS, Def. 25.1])**.** Eine stetige lineare Abbildung $S : X \to Y$ heißt *Fredholm-Operator*, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\ker(S)$ ist endlich-dimensional,

(ii) $\operatorname{ran}(S)$ ist abgeschlossen,

(iii) $Y/\operatorname{ran}(S)$ ist endlich-dimensional.

Der *Index von S* ist

$$\operatorname{ind}(S) \;:=\; \dim(\ker(S)) - \dim(Y/\operatorname{ran}(S)) \;\in \mathbb{Z} \; .$$

Die Menge der Fredholm-Operatoren nennen wir $F(X, Y) \subset L(X, Y)$.

Satz 19.3.6 ([HS, Satz 25.2])**.**

(i) $F(X, Y)$ ist eine offene Teilmenge von $L(X, Y)$.

(ii) $\operatorname{ind} : F(X, Y) \to \mathbb{Z}$ ist stetig.

Korollar 19.3.7 ([HS, Kor. 25.3])**.** Für $T \in K(X)$ gilt $\operatorname{ind}(\operatorname{id} - T) = 0$.

Satz 19.3.8 ([W, Satz. VI.2.4])**.** (Fredholmsche Alternative)
Sei $S \in F(X, Y)$ mit $\operatorname{ind}(S) = 0$. Betrachte die Gleichung, für $x \in X$, $y \in Y$,

$$Sx \;=\; y \; . \qquad (*)$$

(i) *Angenommen,* $(*)$ *ist für alle y lösbar*. Dann ist für jedes y die Lösung x eindeutig bestimmt.

(ii) *Angenommen,* $(*)$ *ist nicht für alle y lösbar*. Dann gilt: Ist $(*)$ für ein y_0 lösbar, so bilden die Lösungen einen endlich-dimensionalen affinen Unterraum (mit Dimension > 0).

Satz 19.3.9 ([W, Satz VI.2.5])**.** Sei $T \in K(X)$. Dann gilt:

(i) Ist X unendlich-dimensional, so gilt $0 \in \sigma(T)$.

(ii) Jedes $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von T und der Eigenraum $\ker(\lambda - T)$ ist endlich-dimensional.

(iii) $\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar.

(iv) $\sigma(T)$ besitzt höchstens in 0 einen Häufungspunkt.