Höhere Analysis

Wintersemester 2020

Ingo Runkel
Bereich Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

(Stand: 15. Februar 2021)

Online

Der Kurs findet über MIN-Moodle statt, siehe
https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=637

Bücher

[R] Rudin, Analysis (Oldenbourg, 4. Auflage)

[K] Königsberger, Analysis 2 (Springer)

Denken

Bitte denken Sie beim Durchlesen dieser Notizen mit und sagen mir Bescheid, wenn Sie Fehler finden.

Inhaltsverzeichnis

11 Lebesgue Maß und Integration

Dieses Kapitel folgt hauptsächlich [Kap. 11 aus Rudin].

11.1 Mengenfunktionen

Wir setzen

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

und vereinbaren die Ordnungsrelation $-\infty \leq x \leq \infty$ für alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (zusammen mit der üblichen Ordnung auf $\mathbb{R}$), sowie die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\infty + c &= \infty & (c \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}) \\
-\infty + c &= -\infty & (c \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}) \\
\infty \cdot c &= \begin{cases} \infty & ; c \in \overline{\mathbb{R}}, c > 0 \\ -\infty & ; c \in \overline{\mathbb{R}}, c < 0 \end{cases} \\
1/(\pm\infty) &= 0
\end{aligned}$$

Nicht definiert sind $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $1/0$. Sei $r \in \mathbb{R}$.

Die Menge $(r, \infty) \cup \{\infty\}$ ist eine offene Umgebung von ∞, die Menge $(-\infty, r) \cup \{-\infty\}$ ist eine offene Umgebung von $-\infty$. Für eine Folge $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir damit die Ausdrücke

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \ .$$

Erinnerung: Für eine Menge Ω ist die *Potenzmenge* die Menge der Teilmengen von Ω

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{U \,|\, U \subset \Omega\} \ .$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Theorie zu entwickeln, die Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ein „Volumen“ zuordnet. Die folgenden Beispiele sollen illustrieren, warum man dies nicht für alle Teilmengen gleichzeitig schaffen kann. Beide benutzen das Auswahlaxiom.

Beispiel 11.1.1. Frage: Gibt es $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, sodass

(a) $V([a, b]) = b - a$ für $b \geq a$,

(b) $V(U + a) = V(U)$ für $a \in \mathbb{R}$ *(Translationsinvarianz)*,

(c) Für $U_i \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Teilmengen gilt $V(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} V(U_i)$ *(abzählbare Additivität)* gilt?

Antwort: Nein.

Gegenbeispiel: Für $r \in [0,1]$ setze $M_r = \mathbb{Q} + r$. Dann ist $\bigcup_{r\in[0,1]} M_r = \mathbb{R}$, aber die M_r sind nicht disjunkt, z.B. gilt $M_0 = M_{\frac{1}{2}}$.

Wähle $X \subset [0,1]$, sodass $\bigcup_{r\in X} M_r = \mathbb{R}$, aber nun $M_r \cap M_s = \emptyset$ für $r, s \in X$, $r \neq s$. (Welche Variante des Auswahlaxioms benutzen wir hier?) ?

Wähle eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, also eine Abzählung $q_1, q_2, q_3, \ldots$ der rationalen Zahlen im Intervall $[-1,1]$. Setze nun

$$U_i = X + q_i \ .$$

Für $i \neq j$ ist dann $U_i \cap U_j = \emptyset$ (Warum?), und für $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ gilt ?

$$[0,1] \subset A \subset [-1,2] \ .$$

(Wieso gilt die erste Inklusion? Und warum ist es wichtig, dass die q_i in $[-1,1]$ liegen und nicht z.B. in $[0,1]$?) ?

Das Problem ist jetzt folgendes. Wegen der Inklusionen oben muss gelten $1 \leq V(A) \leq 3$ (Wie folgt das aus (a)–(c)?) ? Andererseits ist wegen (b) auch $V(U_i) = V(U_j)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Nach (c) ist $V(A) = \sum_{i=1}^{\infty} V(U_i)$, und da alle $V(U_i)$ gleich sind, ist dies entweder 0 oder ∞, aber liegt niemals zwischen 1 und 3.

Nebenbemerkung zur Information: Frage: Gibt es $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, sodass

(a) $V([0,1]^3) = 1$,

(b) $V(U) = V(U+a)$ für alle $a \in \mathbb{R}^3$ und $V(U) = V(R(U))$ für jede Rotation $R \in SO(3)$. *(Translations- und Rotationsinvarianz)*,

(c) Für alle $U, W \subset \mathbb{R}^3$ mit $U \cap W = \emptyset$ gilt $V(U \cup W) = V(U) + V(W)$ *(endliche Additivität)*

gilt?

Antwort: Nein.

Gegenbeispiel: Das Banach-Tarski Paradox. Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^3 | |x| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball. Kurz gesagt: Man kann B in fünf disjunkte Teilmengen zerlegen,

$$B = A_1 \cup \cdots \cup A_5 \ ,$$

wobei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und fünf Isometrien $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ finden, alle Kompositionen aus Translation und Rotation, so dass $F_1(A_1), \ldots, F_5(A_5)$ immer noch paarweise disjunkt sind, und

$$F_1(A_1) \cup \cdots \cup F(A_5) = B \cup (B+v) \quad , \quad v = (3,0,0) \ .$$

Aus einem Einheitsball sind also durch geschicktes zerteilen, und drehen und verschieben der Teile zwei Einheitsbälle geworden. Das ist ein Widerspruch zur Existenz von V, da wegen (a) $V(B) > 0$ gelten muss, und wegen (b) und (c), dass

$$V(B) = V(A_1) + \cdots + V(A_5) = V(F(A_1)) + \cdots + V(F(A_5)) = 2V(B) \ .$$

Die Idee der Konstruktion der Zerlegung von B ist recht einfach, die Details sind dann aber sehr technisch (siehe z.B. →wikipedia oder das Buch „The Banach-Tarski paradox“ von Tomkowicz und Wagon). Hier geben wir daher nur kurz die Idee:

1. Betrachte die freie Gruppe F_2 in zwei Erzeugern a, b. Diese kann man zerlegen als
$$F_2 = \{e\} \cup W_a \cup W_{a^{-1}} \cup W_b \cup W_{b^{-1}} \ ,$$
wobei W_x für (gekürzte) Worte in den Erzeugern steht, die mit x beginnen. Nun muss man sich überzeugen, dass
$$F_2 = W_a \cup (aW_{a^{-1}}) \quad \text{sowie} \quad F_2 = W_b \cup (bW_{b^{-1}}) \ ,$$
jeweils als disjunkte Vereinigung.

2. Es gibt injektive Gruppenhomomorphismen $F_2 \to SO(3)$. Z.B. indem man a und b auf Rotationen um geeignete irrationale Winkel um verschiedene Achsen abbildet. Sei $\varphi : F_2 \hookrightarrow SO(3)$ ein solcher Gruppenhomomorphismus und $H = \varphi(F_2)$ das Bild von F_2.

   Der Rand S^2 von B zerfällt jetzt in H-Orbits. Sei $X \subset S^2$ ein Repräsentatensystem der Orbits. Dann gibt es also für jeden Punkt $p \in S^2$ genau ein $x \in X$ und ein (nicht unbedingt eindeutiges) $h \in H$, sodass $p = h.x$. Setze
$$C_e = X \ , \quad C_g = W_g.X \ \text{für} \ g \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \ .$$
   Dann $C_g \subset S^2$ und es gilt per Konstruktion, dass
$$S^2 = C_e \cup C_a \cup C_{a^{-1}} \cup C_b \cup C_{b^{-1}} \ ,$$
   sowie
$$S^2 = C_a \cup (a.C_{a^{-1}}) \quad \text{sowie} \quad S^2 = C_b \cup (b.C_{b^{-1}}) \ .$$
   Um von S^2 auf B zu kommen, ersetzt man $p \in S^2$ durch den Radius von 0 zu $p \in S^2$ (aber ohne den Punkt 0).

3. Ab jetzt fängt das Gebastel an. Zum einen hat man das Stück C_e nicht benutzt. Schlimmer ist, dass die einzelnen Stücke C_g nicht disjunkt sind. Allerdings kann dies nur bei $x \in X$ passieren, die einen nicht-trivialen Stabilisator in H haben (Warum?). Dies kann man alles reparieren, aber das machen wir hier nicht. ?

Definition 11.1.2. Sei Ω eine Menge, und sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

(i) $\mathcal{R}$ heißt *Ring (auf Ω)*, falls $\mathcal{R}$ nicht leer ist, und falls für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt:

$$A \cup B \in \mathcal{R} \quad , \quad A \setminus B \in \mathcal{R} \ .$$

(ii) $\mathcal{R}$ heißt *σ-Ring*, falls $\mathcal{R}$ ein Ring ist, und für alle $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ \in \ \mathcal{R} \ .$$

(iii) Eine *(σ-)Algebra (auf Ω)* ist ein (σ-)Ring, der Ω enthält.

Bemerkung 11.1.3.

(1) Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Dann gilt $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für alle $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cap B \in \mathcal{R}$. ($\rightarrow$Übung [Z1A3])

(2) Sei $\mathcal{R}$ ein σ-Ring. Für alle $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$ gilt ($\rightarrow$Übung [Z1A3]):

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \ \in \ \mathcal{R} \ .$$

(3) Sei $(\mathcal{R}_x)_{x \in X}$ eine durch X indizierte Familie von Ringen auf einer Menge Ω. Dann ist auch $\mathcal{R} = \bigcap_{x \in X} \mathcal{R}_x$ ein Ring auf Ω. Das gleiche gilt analog auch für σ-Ringe und (σ-)Algebren. (Warum? Stimmt das auch für $\bigcup_{x \in X} \mathcal{R}_x$?) ?

(4) Wegen Teil 3 gibt es für eine beliebige Teilmenge $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$ einen kleinsten Ring (oder kleinsten σ-Ring, kleinste (σ-)Algebra) $\mathcal{R}(S)$, der S enthält, nämlich

$$\mathcal{R}(S) \ = \ \bigcap_{\mathcal{R} \text{ Ring}, S \subset \mathcal{R}} \mathcal{R} \ .$$

Der Durchschitt ist nicht leer, da zumindest $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\Omega)$ erlaubt ist.

Beispiel 11.1.4.

(1) Für jedes Ω ist $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

(2) Für $A \subsetneq \Omega$ ist $\mathcal{R} = \{\emptyset, A\}$ ein σ-Ring, aber keine Algebra, und $\mathcal{R} = \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra.

(3) Alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind ein Ring aber kein σ-Ring. Alle endlichen oder abzählbar-unendlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind ein σ-Ring.

(4) Die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bilden keinen Ring.

Definition 11.1.5. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Eine *Mengenfunktion (auf $\mathcal{R}$)* ist eine Funktion $\phi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass

- entweder $+\infty$ oder $-\infty$ nicht im Bild von ϕ enthalten sind, und
- ϕ nicht nur den Wert $+\infty$ oder nur den Wert $-\infty$ annimmt.

Sei nun ϕ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{R}$.

- ϕ ist *additiv*, falls für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\phi(A \cup B) \; = \; \phi(A) + \phi(B) \; .$$

- Für einen σ-Ring $\mathcal{R}$ heißt ϕ *abzählbar additiv* oder auch *σ-additiv*, falls für alle $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ gilt:

$$\phi(A) \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i) \quad \text{wobei} \;\; A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Bemerkung 11.1.6. Sei ϕ eine additive Mengenfunktion auf einem Ring $\mathcal{R}$.

(1) $\phi(\emptyset) = 0$.

⌈ Für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$. Somit $\phi(A) = \phi(A \cup \emptyset) = \phi(A) + \phi(\emptyset)$. Per Annahme an ϕ gibt es ein A, sodass $\phi(A) \neq \pm\infty$. Dann ist die vorherige Gleichung nur für $\phi(\emptyset) = 0$ erfüllt.
(Für $\phi(A) = \infty$ wäre auch $\phi(\emptyset) = \infty$ erlaubt.) ⌋

(2) Per Induktion gilt für paarweise disjunkte $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$, dass $\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n)$.

(3) Für (nicht unbedingt disjunkte) $A, B \in \mathcal{R}$ gilt

$$\phi(A \cup B) + \phi(A \cap B) = \phi(A) + \phi(B) \; .$$

Falls $A \subset B$ und $\phi(A) \neq \pm\infty$, so gilt

$$\phi(B \setminus A) = \phi(B) - \phi(A) \; .$$

Falls $\phi(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$, so folgt aus $A \subset B$, dass $\phi(A) \leq \phi(B)$. ($\to$Übung [Z1A3])

(4) Wenn man für ϕ gleichzeitig die Werte $+\infty$ und $-\infty$ erlauben würde, dann kann auf der rechten Seite in der Additivitätsbedingung der Fall $\infty - \infty$ auftreten, was nicht definiert ist. Später werden wir uns hauptsächlich mit Mengenfunktionen befassen, die überall ≥ 0 sind.

(5) σ-additive Mengenfunktionen sind automatisch auch additiv. (Warum? *Hinweis:* Teil (1).) ?

(6) In der Definition von σ-additiv hängt A offensichtlich nicht von der Reihenfolge der Mengen A_i ab. Damit muss dann auch die Summe der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i)$ unabhängig von der Reihenfolge sein. Das geht aber nur, wenn die Reihe absolut konvergiert. (Warum?) ?

Beispiel 11.1.7.

(1) Für $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist die Funktion

$$\phi(A) = \text{„Anzahl der Elemente in } A\text{“}$$

eine σ-additive Mengenfunktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. (Warum? Funktioniert das gleiche ϕ auch mit $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{N}$?) ?

(2) Für $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist die Funktion

$$\phi(A) = \begin{cases} \text{„Anzahl der Elemente in } A\text{“} & ; A \text{ endlich} \\ -\infty & ; A \text{ unendlich} \end{cases}$$

eine additive Mengenfunktion, die nicht σ-additiv ist. (Warum? Kann man statt $-\infty$ auch andere Werte nehmen?) ?

(3) Sei $p \in \mathbb{R}$. Für $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist

$$\phi(A) = \begin{cases} 17 & ; p \in A \\ 0 & ; p \notin A \end{cases}$$

eine σ-additive Mengenfunktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. (Warum?) ?

Satz 11.1.8. Sei $\mathcal{R}$ ein σ-Ring und ϕ eine σ-additive Mengenfunktion auf $\mathcal{R}$. Seien $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$, sodass $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, und sei $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \phi(A_n) = \phi(A) \ .$$

Beweis. Setze $B_1 = A_1$ und $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$, sodass $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Es gilt

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

und damit nach σ-Additivität von ϕ, dass

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(B_i) = \lim_{n\to\infty} \phi(A_n) \ .$$

□

11.2 Das Lebesgue-Maß

Ziel ist es, eine σ-additive Mengenfunktion λ auf bestimmten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ zu definieren, die wir als Volumen interpretieren werden.

Satz 11.2.1. Sei $\mathcal{B}$ die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$, die alle offenen Mengen erhält (siehe Bemerkung 11.1.3 (4)). Auf $\mathcal{B}$ gibt es eine eindeutige σ-additive Mengenfunktion $\lambda : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) λ ist translationsinvariant, d.h. für alle $v \in \mathbb{R}^d$ und $M \in \mathcal{B}$ gilt $\lambda(M + v) = \lambda(M)$

(ii) Sei $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $I = \{p \in \mathbb{R}^d \,|\, 0 \leq p_i \leq a_i\}$ der abgeschlossene Quader mit Seitenlängen $a_1, \ldots, a_d$. Dann $\lambda(I) = a_1 \cdot a_2 \cdots a_d$.

Die so erhaltene Mengenfunktion λ heißt das *Lebesgue-Maß auf* $\mathcal{B}$.

Der Beweis ist eine →Übung [Z3A5], braucht aber noch das Material aus diesem Kapitel und kommt daher erst später.

Bemerkung 11.2.2.

(1) $\mathcal{B}$ enthält insbesondere auch alle abgeschlossenen Mengen. Z.B. den abgeschlossenen Einheitsball B im $\mathbb{R}^d$. Erstmal ist nicht so klar, welchen Wert $\lambda(B)$ hat, aber aus dem obigen Satz wissen wir zumindest, dass $\lambda(B)$ existiert und eindeutig ist.

(2) Die Mengenfunktion λ ist automatisch auch rotations- und spiegelungsinvariant, d.h. für jedes $R \in O(n)$ und $M \in \mathcal{B}$ haben wir $\lambda(R(M)) = \lambda(M)$. Das ist nicht offensichtlich und wird erst in Kaptel 12.3 gezeigt werden.

(3) In der Tat werden wir λ auf einer größeren σ-Algebra definieren als $\mathcal{B}$, dazu später mehr.

Jetzt machen wir uns auf den länglichen Weg, die Zutaten für die Konstruktion von λ zu sammeln.

Definition 11.2.3.

(i) Ein *Intervall im* $\mathbb{R}^d$ ist eine Menge der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, a_i \le x_i \,\wedge\, x_i \le b_i\}$$

für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \le b_i$. Hier dürfen einige oder alle der „$\le$“ durch „$<$“ ersetzt werden.

(ii) Eine Elementarmenge ist eine Vereinigung von endlich vielen Intervallen. Die Menge aller Elementarmengen im $\mathbb{R}^d$ nennen wir $\mathcal{E}$.

Bemerkung 11.2.4.

(1) In der Definition ist $a_i = b_i$ erlaubt. Auch in dem Fall können alle Ungleichungen mit „$<$“ gewählt werden, sodass $\emptyset$ ein Intervall ist. Insbesondere $\emptyset \in \mathcal{E}$.

(2) Ein Intervall im $\mathbb{R}^d$ kann als Produkt von Intervalle in $\mathbb{R}$ geschrieben werden, $I = I_1 \times \cdots \times I_d$.

(3) Alle $A \in \mathcal{E}$ sind beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $\mathcal{E}$ kein σ-Ring. (Warum?) ?

Satz 11.2.5. $\mathcal{E}$ ist ein Ring.

Beweis.
Beh. 1: $A, B \in \mathcal{E} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{E}$.

$\ulcorner$ Klar. $\lrcorner$

Beh. 2: Für Intervalle I, J im $\mathbb{R}^d$ ist auch $I \cap J$ ein Intervall.

$\ulcorner$ Schreibe $I = I_1 \times \cdots I_d$ und $J = J_1 \times \cdots \times J_d$, wobei I_i und J_j jeweils Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Für $x = (x_1, \ldots, x_d)$ ist dann $x \in I \cap J$ äquivalent zu $x_i \in I_i \cap J_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit ist $I \cap J = (I_1 \cap J_1) \times \cdots \times (I_d \cap J_d)$ wieder ein Intervall im $\mathbb{R}^d$. $\lrcorner$

Beh. 3: $A, B \in \mathcal{E} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{E}$.

$\ulcorner$ Folgt aus Beh. 1 und 2. (Wie?) $\lrcorner$?

Beh. 4: Für Intervalle I, J im $\mathbb{R}^d$ ist $I \setminus J \in \mathcal{E}$.

$\lceil$ Da $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ und $I \cap J$ nach 1) ein Intervall ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $J \subset I$. Schreibe $I = I_1 \times \cdots I_d$ und $J = J_1 \times \cdots \times J_d$, und zerlege

$$I_i = K_i^{(1)} \cup K_i^{(2)} \cup K_i^{(3)}$$

in disjunkte Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $K_i^{(2)} = J_i$. Dann

$$I \setminus J = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_d) \neq (2,\ldots,2)} K_1^{(a_1)} \times \cdots \times K_d^{(a_d)} \ .$$

wobei die Vereinigung über alle d-Tupel $(a_1, \ldots, a_d)$ genommen wird mit $a_i \in \{1, 2, 3\}$, ausser dem Tupel $(2, 2, \ldots, 2)$. Somit ist $I \setminus J$ eine endliche (sogar disjunkte) Vereinigung von Intervallen. $\rfloor$

Beh. 5: $A, B \in \mathcal{E} \ \Rightarrow \ A \setminus B \in \mathcal{E}$.

$\lceil$ Sei $A = \bigcup_{i=1}^m I_i$ und $B = \bigcup_{j=1}^n J_j$. Nach Beh. 4 ist $I_i \setminus J_j \in \mathcal{E}$. Nach Beh. 3 ist auch $\bigcap_{j=1}^n (I_i \setminus J_j) \in \mathcal{E}$. Letztendlich gilt (Warum?) ?

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^m \Big(\bigcap_{j=1}^n (I_i \setminus J_j) \Big) \ \in \mathcal{E} \ .$$ $\rfloor$

Beh. 1 und 5 sind die beiden Eigenschaften, die wir für einen Ring nachweisen müssen. □

Sei $I \subset \mathbb{R}^d$ ein Intervall. Wir definieren $\lambda(I)$ als das Produkt der Kantenlängen. In der Notation von Definition 11.2.3 heißt dies

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \ .$$

Hierbei ist es egal, ob in den einzelnen Ungleichungen in der Definition des Intervalls I „$<$“ oder „$\leq$“ verwendet wird.

Im Rest des Kapitels werden wir λ schrittweise auf immer größere Mengen von Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ausweiten. Das erste Ziel ist die Ausweitung von Intervallen auf Elementarmengen.

Lemma 11.2.6. Für $A \in \mathcal{E}$ gibt es disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ mit $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$.

Der Beweis ist eine →Übung [Z2A2].

Lemma 11.2.7. Sei $A \in \mathcal{E}$ und seinen $I_1, \ldots, I_m$ paarweise disjunkte Intervalle, und $J_1, \ldots, J_n$ paarweise disjunkte Intervalle, sodass sowohl $A = \bigcup_{i=1}^m I_i$ als auch $A = \bigcup_{j=1}^n J_j$ gelten. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^m \lambda(I_i) = \sum_{j=1}^n \lambda(J_j) \ .$$

Beweis. Die Idee ist: „Zeige, dass beide Summen gleich der durch eine gemeinsame Verfeinerung gegebene Summe sind." Das Prinzip „gemeinsame Verfeinerung" findet man in vielen Beweisen. Hier sieht es konkret so aus:

Sei $I = K_1 \times \cdots \times K_d$, wobei jedes K_i ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Sei ferner $K_i = \bigcup_u K_i^{(u)}$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen $K_i^{(u)}$ in $\mathbb{R}$.

Beh. 1: $\lambda(I) = \sum_{u_1,\ldots,u_d} \lambda(K_1^{(u_1)} \times \cdots \times K_d^{(u_d)})$.

⌈ Dies folgt aus der Definition von λ. Ist nämlich $|K_i^{(u)}|$ die Länge des Intervalls $K_i^{(u)}$, so ist die obige Gleichung gerade die Distributivität der Multiplikation:

$$\prod_{i=1}^d \Big(\sum_{u_i} |K_i^{(u_i)}| \Big) = \sum_{u_1,\ldots,u_d} \Big(\prod_{i=1}^d |K_i^{(u_i)}| \Big) \ .$$ ⌋

Sei I ein Intervall und $I = J_1 \cup \cdots \cup J_n$, wobei die J_i paarweise disjunkte Intervalle sind.

Beh. 2: $\lambda(I) = \sum_{j=1}^n \lambda(J_j)$.

⌈ Schreibe $I = K_1 \times \cdots \times K_d$ wie in Beh. 1. Zerlege die K_i in genug Intervalle $K_i = \bigcup_{u_i} K_i^{(u_i)}$, dass jedes J_j als Vereinigung von Intervallen $K_1^{(u_1)} \times \cdots \times K_d^{(u_d)}$ geschrieben werden kann. (Warum geht das?) Dann ist jedes $\lambda(J_j)$ eine Summe wie in Beh. 1 und die Summe über j ergibt genau die Summe für $\lambda(I)$ nach Beh. 1. (Details?) ⌋ ?

?

Jetzt zeigen wir die Aussage des Lemmas. Nach Beh. 2 im Beweis von Satz 11.2.5 ist $K_{ij} = I_i \cap J_j$ ein Intervall. Es gilt $I_i = \bigcup_{j=1}^n K_{ij}$ disjunkt, und daher nach Beh. 2, dass

$$\lambda(I_i) = \sum_{j=1}^n \lambda(K_{ij}) \ .$$

Somit ergibt sich

$$\sum_{i=1}^m \lambda(I_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda(K_{ij}) \ .$$

Fängt man mit $J_j = \bigcup_{i=1}^m K_{ij}$ an, so erhält man den gleichen Ausdruck für $\sum_{j=1}^n \lambda(J_j)$. $\square$

Nach Lemma 11.2.7 ist die folgende Definition sinnvoll: Für $A \in \mathcal{E}$ sei

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^m \lambda(I_i) \ ,$$

wobei $A = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ eine beliebige Zerlegung von A in disjunkte Intervalle ist.

Satz 11.2.8. $\lambda : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine additive Mengenfunktion.

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Seien $A = \bigcup_{i=1}^m I_i$ und $B = \bigcup_{j=1}^m J_j$ disjunkte Zerlegungen in Intervalle. Da $A \cap B = \emptyset$ ist auch $A \cup B = (\bigcup_{i=1}^m I_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m J_j)$ eine disjunkte Zerlegung in Intervalle. Per Definition von λ gilt dann $\lambda(A \cup B) = \sum_{i=1}^m \lambda(I_i) + \sum_{j=1}^n \lambda(J_j)$, also $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$. $\square$

Definition 11.2.9. Eine additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt *regulär*, falls gilt: Für alle $A \in \mathcal{E}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $F \in \mathcal{E}$ abgeschlossen und $G \in \mathcal{E}$ offen mit $F \subset A \subset G$ und

$$\mu(G) - \varepsilon \ \leq \ \mu(A) \ \leq \ \mu(F) + \varepsilon \ .$$

Beispiel 11.2.10.

(1) Betrachte die Mengenfunktion $\phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\phi(A) = 1$ falls $0 \in A$ und $\phi(A) = 0$ sonst (vergleiche Beispiel 11.1.7 (3)). Dann ist ϕ additiv und regulär. (Warum?) ?

(2) Sei $d = 1$, so dass wir Elementarmengen $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}$ ansehen. Definiere $\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ wie folgt. $\psi(A) = 1$ falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $(0, \varepsilon) \subset A$ und $\psi(A) = 0$ sonst. Dann ist ψ additiv (Warum?). Aber ψ ist nicht regulär, ? wie man an der Wahl $A = \{0\}$ erkennt.

(3) λ ist regulär. ($\to$Übung [Z2A2])

(Welche von den Mengenfunktionen in (1)–(3) wären regulär, wenn man in ? der Definition statt dessen gefordert hätte, dass auch F offen ist? Oder G abgeschlossen?)

Definition 11.2.11. Sei $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine additive reguläre Mengenfunktion (die nur endliche Werte annimmt). Das *äußere Maß zu μ* ist definiert als, für $M \subset \mathbb{R}^d$,

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \,\middle|\, A_n \in \mathcal{E} \text{ offen}, M \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n \right\} .$$

(Warum existiert das Infimum?) ?

Bemerkung 11.2.12.

(1) μ^* ist für *alle* Teilmengen vom $\mathbb{R}^d$ definiert.

(2) Für alle $M \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\mu^*(M) \geq 0$. Für alle $M, N \subset \mathbb{R}^d$ mit $M \subset N$ gilt $\mu^*(M) \leq \mu^*(N)$ (Warum?). ?

(3) Mengen in $\mathcal{E}$ sind beschränkt, also sind die abgeschlossenen Mengen in $\mathcal{E}$ auch kompakt. Die Bedingung in der Definition von μ^*, dass A_n offen sein muss, benutzen wir gleich in einem „kompakt hat endliche Teilüberdeckung“ Argument.

Satz 11.2.13. Sei $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ additiv und regulär. Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Beweis. Beh.: $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

⌈ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da μ regulär ist, gibt es $G \in \mathcal{E}$ offen mit $A \subset G$ und $\mu(G) - \varepsilon \leq \mu(A)$. Wegen seiner Definition als Infimum ist $\mu^*(A) \leq \mu(G)$. Insgesamt also

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \mu^*(A) - \varepsilon \leq \mu(A) \ .$$ ⌋

Beh.: $\mu^*(A) \geq \mu(A)$.

⌈ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\mu^*(A)$ die größte untere Schranke ist, gibt es offene Menge $A_n \in \mathcal{E}$ mit $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon \ .$$

Da μ regulär ist, gibt es eine abgeschlossene Menge $F \subset A$ mit $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$. Da A beschränkt ist, ist auch F beschränkt, und somit kompakt. Die $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine offene Überlagerung von F. Wir können eine endliche Teilüberlagerung finden, und diese sei obdA gegeben durch $A_1, \ldots, A_N$. Da μ additiv ist, erhalten wir

$$\mu(F) \leq \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_N) \ .$$

(Warum? Und warum mussten wir erst zu endlich vielen A_n übergehen?) Insbesondere gilt ?

$$\mu(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

Insgesamt also

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \mu(A) < \mu^*(A) + 2\varepsilon \ .$$ ⌋

□

Satz 11.2.14. (Subadditivität des äußeren Maßes)
Sei $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ additiv und regulär. Seien $M_n \subset \mathbb{R}^d$ ($n \in \mathbb{N}$) und $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Dann

$$\mu^*(M) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n) \ .$$

Beweis. Hier benutzen wir den $2^{-n}\varepsilon$-Trick, den wir noch ein paar Mal verwenden werden.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Definition von $\mu^*(M_n)$ als Infimum gibt es offene Mengen $A_i^{(n)} \in \mathcal{E}$, sodass $M_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{(n)}$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) < \mu^*(M_n) + 2^{-n}\varepsilon \ .$$

Nun ist per Konstruktion die Familie $(A_i^{(n)})_{i,n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von M. Jetzt müssten wir eine Abzählung wählen und die unendliche Reihe bilden. Aber bei absolut konvergeten Reihen können wir umordnen (Satz 4.9.6), also können wir schreiben

$$\begin{aligned}\mu^*(M) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i^{(n)})}_{\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)})} \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) \Big) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mu^*(M_n) + 2^{-n}\varepsilon \Big) \\ &= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n) \ .\end{aligned}$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Nun noch ein Wort zu $(*)$. In der Tat ist dies sogar eine Gleichheit. Das folgt aus dem großen Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen (siehe „Nebenbemerkung zur Information" unter Bemerkung 4.9.7). Aber den wollen wir später mittels Lebesgue-Integration beweisen, da dürfen wir ihn hier nicht schon benutzen. □

Beispiel 11.2.15. Betrachte den Fall $d = 1$ und $\mu = \lambda$. Dann ist λ^* auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert. Nach Satz 11.2.13 gilt $\lambda^*([a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a$ für $b \geq a$, und λ^* ist translationsinvariant (Warum?). Nach Beispiel 11.1.1 kann λ^* also nicht abzählbar additiv sein, und es muss eine Wahl von $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geben, wo die Abschätzung in Satz 11.2.14 wirklich ein „<" ist. ?

Hier ist so eine Wahl: Betrachte die Mengen X und U_i aus Beispiel 11.1.1. Da λ^* translationsinvariant ist, gilt $\lambda^*(U_i) = \lambda^*(X)$ für alle i. Da $[0, 1] \subset$

$\bigcup_i U_i$ folgt (mit Bemerkung 11.2.12 (2)) auch

$$1 = \lambda^*([0,1]) \le \lambda^*\Big(\bigcup_{i=1}^\infty U_i\Big) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(U_i) \ .$$

Also $\lambda^*(X) > 0$ (sonst wäre die rechte Seite Null).

Setze nun $M_i = U_i$ und $M = \bigcup_i U_i$. Aus Beispiel 11.1.1 wissen wir $M \subset [-1,2]$, also

$$\lambda^*(M) \le \lambda^*([-1,2]) = 3 \ .$$

Anderseits gilt

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda^*(M_i) = \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(X) = \infty \ .$$

Lemma 11.2.16. Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ höchstens abzählbar. Dann $\lambda^*(M) = 0$.

Beweis. Sei $M = \{m_1, m_2, \dots\}$. (M ist endlich, wenn die m_i nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Ansonsten ist M abzählbar.) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle offene Intervalle I_n ($n \in \mathbb{N}$) so dass $m_n \in I_n$ und $\lambda(I_n) \le \varepsilon 2^{-n}$. Dann gilt

$$\lambda^*(M) \overset{(1)}{\le} \lambda^*\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty I_n\big) \overset{(2)}{\le} \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \lambda^*(I_n) \overset{(3)}{=} \sum_{n=1}^\infty \lambda(I_n) \le \sum_{n=1}^\infty \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon \ ,$$

wobei (1) nach Bem. 11.2.12.2 gilt, (2) folgt direkt aus Def. 11.2.11, da $\bigcup_{n=1}^\infty I_n$ eine abzählbare Vereinigung offener Elementarmengen ist, und (3) ist gerade Satz 11.2.13. □

Definition 11.2.17.

(i) Sei Ω eine Menge und $A, B \subset \Omega$. Die *symmetrische Differenz* von A und B ist

$$A \Delta B \ = \ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \ .$$

(ii) Sei $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ additiv und regulär. Für $A, B \subset \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$d(A,B) = \mu^*(\,A \Delta B\,) \ .$$

Bemerkung 11.2.18.

(1) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$, sodass mindestens eines von $\mu^*(A)$ und $\mu^*(B)$ endlich ist. Dann

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \ \le \ d(A,B) \ .$$

$\to$Übung [Z2A2].

(2) Für $A, B, C \subset \mathbb{R}^d$ gilt $d(A,B) = d(B,A)$ und $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. Ferner gilt für $A', B' \subset \mathbb{R}^d$,

$$d(\, A \cup A' \,,\, B \cup B' \,) \;\leq\; d(A,B) + d(A',B') \;,$$

und genauso für „$\cap$“ statt „$\cup$“. ($\rightarrow$Übung [Z2A2])

(3) Teil 2 zeigt, dass man für jedes μ eine Halbmetrik d auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ erhält. Eine *Halbmetrik* erfüllt alle Eigenschaften einer Metrik außer $d(A,B) = 0 \Rightarrow A = B$.

Betrachte zum Beispiel $\mu = \lambda$ und $d = 1$. Dann $d([0,a],[0,b]) = |a-b|$, aber auch $d([0,1],(0,1)) = 0$. Allgemeiner zeigt Lemma 11.2.16, dass $d(A,B) = 0$, falls $A \Delta B$ abzählbar ist.

(4) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt *Nullmenge (bzgl. μ)*, falls $\mu^*(A) = 0$. Für $A, B \subset \mathbb{R}^d$ gilt $d(A,B) = 0$ genau dann, wenn man A durch Weglassen und Hinzunehmen von Nullmengen in B überführen kann. (Warum?) ?

Definition 11.2.19. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$.

(i) Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ von Teilmengen schreiben wir $A_n \to A$ falls $\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0$.

(ii) A heißt *endlich μ-messbar*, falls es $A_n \in \mathcal{E}$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt, sodass $A_n \to A$. Die Menge der endlich μ-messbaren Mengen nennen wir $\mathcal{M}_e(\mu)$.

(iii) A heißt *μ-messbar* (oder kurz *messbar*), falls es $B_n \in \mathcal{M}_e(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt, sodass $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Wir schreiben

$$\mathcal{M}(\mu) \;:=\; \left\{ A \subset \mathbb{R}^d \,\middle|\, A \text{ ist } \mu\text{-messbar} \right\} \,.$$

Bemerkung 11.2.20.

(1) Jede Nullmenge (bzgl. μ) ist endlich μ-messbar. (Warum?) ?

(2) Es gilt $\mathcal{M}_e(\mu) \subset \mathcal{M}(\mu)$.

Beh.: Endlich μ-messbare Mengen haben endliches äußeres Maß.

Wir zeigen eine etwas allgemeinere Aussage. Seien $A_n \subset \mathbb{R}^d$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\mu^*(A_n) < \infty$ und $A_n \to A$.

Beh.: $\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A)$ und $\mu^*(A) < \infty$.

⌈ Der erste Teil der Behauptung folgt aus $|\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \leq d(A_n, A)$ (Bemerkung 11.2.18 (1)). Der zweite Teil folgt, da für $\mu^*(A) = \infty$ gelten würde, dass $|\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| = \infty$ für alle n. ⌋

Satz 11.2.21. Sei $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ additiv und regulär. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra, und μ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Der Beweis folgt am Ende des Kapitels.

Definition 11.2.22.

(i) Ein *Maßraum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, wobei Ω eine Menge ist, $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra (die *messbaren Mengen* in Ω), und $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ eine σ-additive Mengenfunktion (das *Maß* auf Ω).

(ii) Eine Menge $N \in \mathcal{M}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt *Nullmenge*.

Beispiel 11.2.23.

(1) Nach Satz 11.2.21 macht jedes reguläre, additive $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ den $\mathbb{R}^d$ zu einem Maßraum mit $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu)$ und $\mu = \mu^*$.

(2) Sei $p \in \mathbb{R}^d$ und $\phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch $\phi(A) = 1$ falls $p \in A$ und $\phi(A) = 0$ sonst (siehe Beispiel 11.2.10 (1)). Dann ist jede Menge endlich ϕ-messbar (Warum?). Der resultierende Maßraum ist $\Omega = \mathbb{R}^d$, ?
$\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und für eine beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\phi^*(A) = 1$, falls $p \in A$ und $\phi^*(A) = 0$ sonst (Warum?). ?

■ Für Mengen $M \in \mathcal{M}(\mu)$ schreiben wir ab jetzt $\mu(M)$ anstelle von $\mu^*(M)$. Diese Notation ist sinnvoll wegen Satz 11.2.13: Für $M \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(M) = \mu^*(M)$.

Definition 11.2.24. Für $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mu = \lambda$ und $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\lambda)$ heißen Mengen in $\mathcal{M}$ *Lebesgue-messbar* und $\lambda : \mathcal{M}(\lambda) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ heißt das *Lebesgue-Maß*.

Definition 11.2.25. Die *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B}$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$ enthält. Elemente von $\mathcal{B}$ heissen *Borel-Mengen*.

Bemerkung 11.2.26. Sei $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ additiv und regulär.

(1) Es gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}(\mu)$. ($\to$Übung [Z3A2])

(2) Jedes $M \in \mathcal{M}(\mu)$ ist die Vereinigung einer Borel-Menge und einer Nullmenge (bzgl. μ). ($\to$Übung [Z3A2])

Beweis von Satz 11.2.21. Für diesen Beweis benutzen wir wieder μ nur auf Elementarmengen und μ^* für allgemeine Mengen.

Beh. 1: $\mathcal{M}_e(\mu)$ ist ein Ring.
($\to$Übung [Z3A2])

Beh. 2: μ^* ist additiv auf $\mathcal{M}_e(\mu)$.

⌈ Seien $A, B \in \mathcal{M}_e(\mu)$ beliebig. Setze $p = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)$ und $q = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Wir werden zeigen, dass $p = q$. Für $A \cap B = \emptyset$ folgt die Behauptung.

Wähle $A_n, B_n \in \mathcal{E}$, sodass $A_n \to A$ und $B_n \to B$. Setze $p_n = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n)$ und $q_n = \mu(A_n) + \mu(B_n)$ Da μ additiv ist, gilt $p_n = q_n$. Nach Satz 11.2.13 kann man in p_n und q_n auch μ durch μ^* ersetzen.

In Bemerkung 11.2.20 (2) haben wir gesehen, dass aus $A_n \to A$ folgt, dass $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$. Also $\lim_{n\to\infty} q_n = q$.

Kombiniert man Teile 1 und 2 von Bemerkung 11.2.18, sieht man, dass $A_n \cap B_n \to A \cap B$, und genauso für „$\cup$" (Details?). Also auch $q_n \to q$. ?

Da $p_n = q_n$ folgt nun $p = q$ im Grenzübergang $n \to \infty$. ⌋

Beh. 3: Für $A_n \in \mathcal{M}_e(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt gilt

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \ .$$

⌈ Setze $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Aus Subadditivität von μ^* (Satz 11.2.14) wissen wir $\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Andererseits haben wir in Beh. 2 endliche Additivität schon gezeigt, also

$$\mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_{i=1}^{N} \mu^*(A_n) \ .$$

Da $A_1 \cup \cdots \cup A_N \subset A$ folgt $\mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_N) \le \mu^*(A)$ (Bemerkung 11.2.12 (2)). Also gilt für jedes N, dass

$$\sum_{i=1}^{N} \mu^*(A_n) \le \mu^*(A) \ .$$

Für $N \to \infty$ folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \le \mu^*(A)$. ⌋

Beh. 4: Für $A \in \mathcal{M}(\mu)$ gilt: $A \in \mathcal{M}_e(\mu) \Leftrightarrow \mu^*(A) < \infty$.

⌈ Die Richtung „$\Rightarrow$" ist Bemerkung 11.2.20 (2).

Für „$\Leftarrow$" kann man wie folgt vorgehen. Da $A \in \mathcal{M}(\mu)$, kann man $A_n \in \mathcal{M}_e(\mu)$ finden, sodass $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Die A_n sind nicht notwendigerweise disjunkt, aber wir können setzen

$$B_1 = A_1 \quad , \quad B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \ .$$

Nach Beh. 1 ist $\mathcal{M}_e(\mu)$ ein Ring, und somit gilt $B_n \in \mathcal{M}_e(\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ mit paarweise disjunkten Mengen B_n, und nach Beh. 3 haben wir

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) \ .$$

Insbesondere ist die Summe der Reihe endlich (da per Annahme $\mu^*(A) < \infty$).

Setze $C_N = B_1 \cup \cdots \cup B_N$. Dann auch $C_N \in \mathcal{M}_e(\mu)$. Ferner gilt

$$d(C_N, A) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n \Big) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(B_n) \ .$$

Für $N \to \infty$ geht die Reihe auf der rechten Seite gegen Null (da die Reihe für $N = 1$ konvergiert). Also $C_N \to A$. Dies impliziert bereits, dass $A \in \mathcal{M}_e(\mu)$ ($\to$Übung [Z3A2]). ⌋

Beh. 5: $\mathcal{M}(\mu)$ ist eine σ-Algebra.

⌈ $\mathbb{R}^d \in \mathcal{M}(\mu)$ ist klar.

Abzählbare Vereinigungen: Sei $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$. Dann $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^{(n)}$ für geeignete $B_k^{(n)} \in \mathcal{M}_e(\mu)$, und $\bigcup_n A_n = \bigcup_{n,k} B_k^{(n)}$ ist immer noch abzählbar.

Differenzen: Seien $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, wobei $A_i, B_j \in \mathcal{M}_e(\mu)$. Dann $A_i \cap B_j \in \mathcal{M}_e(\mu)$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_i \cap B_j = A_i \cap B$. Also $A_i \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$. Aber $\mu^*(A_i \cap B) \le \mu^*(A_i) < \infty$. Nach Beh. 4 gilt also sogar $A_i \cap B \in \mathcal{M}_e(\mu)$. Letztendlich

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus (A_i \cap B) \ ,$$

und $A_i \setminus (A_i \cap B) \in \mathcal{M}_e(\mu)$. Also $A \setminus B \in \mathcal{M}(\mu)$. ⌋

Beh. 6: μ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{M}(\mu)$.

⌈ Sei $M \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, wobei die $M_n \in \mathcal{M}(\mu)$ paarweise disjunkt sind.

Falls $\mu^*(M_n) = \infty$ für ein n, dann auch $\mu^*(M) = \infty$, und aus der Identität bei σ-Additivität wird $\infty = \infty$.

Falls $\mu^*(M_n) < \infty$ für alle n, dann $M_n \in \mathcal{M}_e(\mu)$ und nach Beh. 3 gilt

$$\mu^*(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_n) \ . \qquad \rfloor$$

$\square$

Mit den Ergebnissen aus diesem Kapitel kann man jetzt auch Satz 11.2.1 beweisen. (→Übung [Z3A5])

11.3 Messbare Funktionen

In diesem Kapitel sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ fix gewählt.

Beispiel 11.3.1. Zwei Beispiele, die wir besonders betrachten wollen, sind:

(1) $\mathbb{R}^d$ mit Lebesgue-messbaren Mengen und Lebesgue Maß (Def. 11.2.24).

(2) $\Omega = \mathbb{Z}^d$ mit $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ und $\mu(A) =$ (Anzahl der Elemente in A) (Bsp. 11.1.7 (1)). Und das gleiche Beispiel mit $\mathbb{N}$ statt $\mathbb{Z}$.

Definition 11.3.2. Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *messbar*, falls die Mengen

$$\{x \in \Omega \,|\, f(x) > a\}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ messbar sind.

Bemerkung 11.3.3.

(1) Statt „$f(x) > a$“ kann man äquivalent auch andere Bedingungen nehmen. Z.B.:

Beh.: f ist messbar genau dann, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq a\}$ messbar ist.

$\lceil$ ⇒: Setze $M_n = \{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\}$. Da f messbar ist, sind alle M_n messbar. Es gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \;=\; \{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq a\} \ .$$

Da $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist, ist auch der abzählbare Durchschnitt messbar (Bemerkung 11.1.3 (2)).
⇐: Ähnlich. (Details?) $\rfloor$?

Genauso kann man äquivalent die Bedingungen $f(x) < a$ und $f(x) \leq a$ verwenden. (Warum?) ?

(2) Sei $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ additiv und regulär. Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mu), \mu)$ wie in Beispiel 11.2.23 (1). Da $\mathcal{M}(\mu)$ alle Borel-Mengen enthält (Bemerkung 11.2.26 (1)), sind insbesondere alle offenen Mengen messbar.

Beh.: Alle stetigen Funktion $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ sind bezüglich $\mathcal{M}(\mu)$ messbar.

⌈ Sei $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig. Dann ist $\{x|f(x) > a\} = f^{-1}\big((a, \infty]\big)$ das Urbild einer offenen Menge, also selber wieder offen und damit messbar. ⌋

■ Für eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir $f_\pm : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ als

$$f_+(x) = \max(0, f(x)) \quad , \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0) \ .$$

Man beachte das extra Minuszeichen bei f_-. Es gilt

$$f = f_+ - f_- \ .$$

Lemma 11.3.4.

(i) Ist f messbar, so auch $|f|$ und $f_\pm$.

(ii) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind auch messbar

$$g(x) = \sup\{f_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad h(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x) \ .$$

Das gleiche gilt für inf und lim inf.

Beweis.

(i) Es gilt

$$\big\{x \,\big|\, |f(x)| > a\big\} \ = \ \big\{x \big| f(x) > a\big\} \cup \big\{x \big| f(x) < -a\big\} \ \in \ \mathcal{M} \ .$$

Für $f_\pm$ ist das Argument ähnlich. (Details?) ?

(ii) Für die Funktion g mit „sup“ gilt

$$\big\{x \,\big|\, g(x) > a\big\} \ = \ \big\{x \big| \exists n : f_n(x) > a\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{x \big| f_n(x) > a\big\} \ \in \ \mathcal{M} \ .$$

Für „inf“ ist das Argument ähnlich. (Wie?) ?

Für h schreiben wir

$$h(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\sup \{ f_k(x) \,|\, k > n \}}_{=:h_n(x)} \Big) = \inf\{h_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\} \,.$$

(Warum gelten die letzten beiden Gleichungen? *Hinweis:* Welche Monotonie-Eigenschaft in n hat $h_n(x)$?) ?

Nach der ersten Aussage in Teil (ii) ist h_n messbar, und daher auch $h(x)$, wieder nach der ersten Aussage in Teil (ii) (aber diesmal für „inf"). Für „lim inf" verfährt man ähnlich. (Wie?) ?

□

Satz 11.3.5. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Konvergiert f_n punktweise gegen f, so ist auch f messbar.

Beweis. Klar nach Lemma 11.3.4 (ii). (Warum?) □ ?

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Das folgende Lemma zeigt, dass dann auch $f + g$ und $f \cdot g$ messbar sind.

Lemma 11.3.6. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und sei $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig. Dann ist auch $x \mapsto H(f(x), g(x))$ messbar.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $U = H^{-1}\big((a, \infty]\big) \subset \mathbb{R}^2$. Da H stetig ist, ist U offen. Schreibe U als Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen $I_n \subset \mathbb{R}^2$, also $U = \bigcup_n I_n$ (→Übung [Z2A5]). Wir müssen zeigen, dass die Menge

$$\begin{aligned} M &= \{x | H(f(x), g(x)) > a\} = \{x | (f(x), g(x)) \in U\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | (f(x), g(x)) \in I_n\} \end{aligned}$$

messbar ist. Dazu bemerkt man zuerst, dass $(f(x), g(x)) \in I_n$ genau dann, wenn $f(x) \in (a_n, b_n)$ und $g(x) \in (c_n, d_n)$ für geeignete $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ (Details?). Damit ist aber jede einzelne der Mengen $\{x | (f(x), g(x)) \in I_n\}$? messbar (Warum?). Also auch deren Vereinigung M. □ ?

Definition 11.3.7.

(i) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *einfach*, falls ihr Wertebereich endlich ist.

(ii) Sei $M \subset \Omega$. Die *charakteristische Funktion zu M* ist die Funktion

$$\chi_M : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad \chi_M(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in M \\ 0 & ; x \notin M \end{cases} \quad .$$

Bemerkung 11.3.8.

(1) Per Definition nimmt eine einfache Funktion nur endlich viele Werte an. Sei $f(\Omega) = \{c_1, \dots, c_n\}$ mit $c_i \neq c_j$ $(i \neq j)$. Setze $M_i = f^{-1}(\{c_i\})$. Dann

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{M_i} \ .$$

(Warum? Und was geht das schief, wenn man nicht $c_i \neq c_j$ fordert?) ?

(2) Man kann einfache Funktionen auch so definieren: „Eine Funktion ist genau dann einfach, wenn sie als (endliche) Linearkombination von charakteristischen Funktionen geschrieben werden kann.“ (Warum?) ?

(3) Die charakteristische Funktion χ_M ist genau dann messbar, wenn M messbar ist. Eine einfache Funktion f ist genau dannn messbar, wenn die Urbilder $f^{-1}(\{a\})$ für alle a im Wertebereich messbar sind. (Warum?) ?

Damit bekommen wir auf einfache Weise Beispiele für nicht messbare Funktionen. Betrachte z.B. den Maßraum $\Omega = \mathbb{R}$ mit messbaren Mengen $\mathcal{M}(\lambda)$. Die Menge $X \subset [0, 1]$ aus Beispiel 11.1.1 ist dann nicht messbar, $X \notin \mathcal{M}(\lambda)$. Also ist auch die charakteristische Funktion $\chi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht messbar (bzgl. $\mathcal{M}(\lambda)$).

Satz 11.3.9. Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Es gibt eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \ .$$

(ii) Falls f messbar ist, so können die einzelnen s_n messbar gewählt werden.

(iii) Falls $f \geq 0$, so können die $s_n(x)$ monoton steigend (in n) gewählt werden.

Die Folgerungen für s_n in (ii) und (iii) können gleichzeitig erfüllt werden.

Beweis. Wir zeigen zuerst Teil (iii). Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für $i = 1, 2, \ldots, n2^n$ setze

$$E_{n,i} = f^{-1}\Big(\big[\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n}\big)\Big) \quad , \quad F_n = f^{-1}\big([n, \infty]\big)$$

und

$$s_n \;=\; n \cdot \chi_{F_n} + \sum_{i=1}^{n2^n} \tfrac{i-1}{2^n} \cdot \chi_{E_{n,i}} \; .$$

Dann erfüllt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgenden Eigenschaften:

- Falls $f(x) \leq n$, dann $|f(x) - s_n(x)| < 2^{-n}$.
- Falls $f(x) = \infty$, dann $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \infty$.
- Falls f messbar ist, so sind auch alle $E_{n,i}$ und F_n messbar, und somit auch alle s_n.
- Für alle $x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

(Warum gelten alle diese Eigenschaften? *Hinweis:* Für die letzte Eigenschaft ist es wichtig, dass bei $n \rightsquigarrow n+1$ jedes Intervall $\big[\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n}\big)$ in zwei disjunkte Teilintervalle zerlegt wird. (Das ist der Grund, warum wir Intervalle der Länge 2^{-n} nehmen.)) ?

Dies zeigt Teil (iii), sowie auch gleichzeitig Teil (ii) für $f \geq 0$.

Für Teil (i) und (ii) zerlegt man $f = f_+ - f_-$ und wendet das obige Ergebnis auf $f_\pm$ an. □

11.4 Integration

Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Bemerkung 11.4.1. Sei $s : \Omega \to \mathbb{R}$ eine einfache messbare Funktion,

(1) In Bemerkung 11.3.8 (1) haben wir bereits gesehen, dass es paarweise disjunkte messbare Mengen $M_1, \ldots, M_m$ gibt mit $s = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{M_i}$ für geeignete $c_i \in \mathbb{R}$.

(2) Seien $N_1, \ldots, N_n$ ebenfalls paarweise disjunkt und messbar mit $s = \sum_{j=1}^n d_j \chi_{N_j}$ für geeignete $d_j \in \mathbb{R}$.

Beh.: Für jede messbare Menge $E \subset \Omega$ gilt

$$\sum_{i=1}^m c_i\, \mu(E \cap M_i) \;=\; \sum_{j=1}^n d_j\, \mu(E \cap N_j) \; .$$

($\rightarrow$Übung [Z3A2])

Definition 11.4.2. Sei $E \in \mathcal{M}$.

(i) Für $s \geq 0$ einfach, messbar sei

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E_i \cap E) \ ,$$

wobei $s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ mit paarweise disjunkten, messbaren Mengen E_i.

(ii) Für $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ messbar sei

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ I_E(s) \,\middle|\, s \text{ einfach, messbar mit } 0 \leq s \leq f \right\} \ .$$

Beispiel 11.4.3. Hier je ein Beispiel zu den beiden Maßräumen in Beispiel 11.3.1.

(1) Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\lambda), \lambda)$. Sei $E = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \geq 1\}$ und $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, $f(x) = |x|^{-d}$, wobei $f(0) = \infty$. Da f stetig ist, ist f messbar bzgl. $\mathcal{M}(\lambda)$ (Bemerkung 11.3.3 (2)).

Beh.: $\int_E f \, d\lambda = \infty$.

⌈ Wähle E_i, $i \in \mathbb{N}$ als die Differenz von zwei Hyperwürfeln

$$E_i = [-i-1, i+1]^d \setminus [-i, i]^d \ .$$

Dann $\lambda(E_i) = (2i+2)^d - (2i)^d \geq d\, 2^d \, i^{d-1}$ (Warum?). Setze $c_i = |(i+1, \ldots, i+1)|^{-d} = (\sqrt{d}\,(i+1))^{-d}$ und $s_N = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$. Dann $0 \leq s_N \leq f$ und ?

$$\begin{aligned} I_E(s_N) &= \sum_{i=1}^{N} (\sqrt{d}\,(i+1))^{-d} \lambda(E_i) \\ &\geq (\sqrt{d})^{-d} \, d\, 2^d \sum_{i=1}^{N} \frac{i^{d-1}}{(i+1)^d} \ \geq \ (\text{Konst.}) \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

(Warum?). Da die harmonische Reihe divergiert, ist das Supremum über alle $I_E(s_N)$ ist somit ∞. ⌋ ?

(2) Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Da in diesem Beispiel jede Menge messbar ist, ist auch jede Funktion f messbar.

Beh.: $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

$\lceil$ Wähle $H_n = \{n\}$ für $n = 1, \ldots, N$ und $s_N = \sum_{n=1}^N f(n)\chi_{H_n}$. Dann $0 \leq s_N \leq f$ und $I_{\mathbb{N}}(s_N) = \sum_{n=1}^N f(n)$ ist genau die N'te Partialsumme.

Fall 1: $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \infty$: Dann divergiert die Folge der Partialsummen, also ist das Supremum der $I_{\mathbb{N}}(s_N)$ auch ∞.

Fall 2: $\sum_{n=1}^\infty f(n) = c < \infty$: Dann gilt $\sup\{I_{\mathbb{N}}(s_N) | N \in \mathbb{N}\} = c$. Somit ist das Supremum über alle s (und nicht nur über die speziellen s_N) auf jeden Fall $\geq c$. Sein nun ein beliebiges s mit $0 \leq s \leq f$ gegeben. Schreibe $s = \sum_i c_i \chi_{E_i}$. Wir können annehmen, dass alle $c_i > 0$. Dann müssen alle Mengen $E_i \subset \mathbb{N}$ endlich sein (Warum). Dann gilt aber $I_{\mathbb{N}}(s) \leq I_{\mathbb{N}}(s_N)$ für ein ?
N groß genug (Warum?). $\rfloor$?

Lemma 11.4.4. Sei $E \in \mathcal{M}$ und seien $s, t \geq 0$ einfach, messbar.

(i) $s \leq t \;\Rightarrow\; I_E(s) \leq I_E(t)$.

(ii) $I_E(s + t) = I_E(s) + I_E(t)$.

(iii) $\int_E s \, d\mu = I_E(s)$.

Beweis. Wir beweisen nur Teil (i), der Rest ist zum selber überlegen (Details? ?
Hinweis: Für Teil (ii) kann man die gleiche Zerlegung benutzen, die wir jetzt in Teil (i) anschauen.).

Wir benutzen das Beweisprinzip „gemeinsame Verfeinerung". Sei $s = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$ mit E_i paarweise disjunkt, und sei $t = \sum_{j=1}^n d_j \chi_{F_j}$ mit F_j paarweise disjunkt. Setze $E_0 = \Omega \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_m)$, $c_0 = 0$ und $F_0 = \Omega \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_n)$, $d_0 = 0$. Dann gilt

$$s = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_i \, \chi_{E_i \cap F_j} \quad \text{und} \quad t = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n d_j \, \chi_{E_i \cap F_j}$$

(Warum?). Wegen $s(x) \leq t(x)$ für alle $x \in \Omega$, gilt $c_i \leq d_j$ für alle i, j, für die ?
$E_i \cap F_j \neq \emptyset$. Es folgt, dass für alle i, j gilt: $c_i \mu(E_i \cap F_j \cap E) \leq d_j \mu(E_i \cap F_j \cap E)$. Insgesamt:

$$I_E(s) = \sum_{i,j} c_i \mu(E_i \cap F_j \cap E) \;\leq\; \sum_{i,j} d_j \mu(E_i \cap F_j \cap E) = I_E(t) \; .$$

$\square$

Definition 11.4.5. Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, und sei $E \subset \Omega$ messbar (jeweils bzgl. $\mathcal{M}$). Schreibe $f = f_+ - f_-$ (Notation wie vor Lemma 11.3.4). Ist mindestens eines der Integrale $\int_E f_+ d\mu$ und $\int_E f_- d\mu$ endlich, so setze

$$\int_E f \, d\mu \ := \ \int_E f_+ \, d\mu \ - \ \int_E f_- \, d\mu \ .$$

Ist $\int_E f \, d\mu$ endlich, so sagen wir f *ist auf E (bzgl. μ) Lebesgue-integrierbar* und schreiben

$$f \in \mathcal{L}(E, \mu) \ .$$

■ Damit $\int_E f \, d\mu$ definiert ist, muss gelten: E ist messbar, f ist messbar, mindestens eines von $\int_E f_+ d\mu$, $\int_E f_- d\mu$ ist endlich.
Damit f integrierbar ist, muss gelten: E ist messbar, f ist messbar, und $\int_E f_+ d\mu$ und $\int_E f_- d\mu$ sind endlich.

■ Ist $\int_E f \, d\mu$ definiert, aber f nicht integrierbar, dann muss also gelten $\int_E f \, d\mu \in \{\pm\infty\}$.

Beispiel 11.4.6. Hier setzen wir Beispiel 11.4.3 fort, in gleicher Reihenfolge.

(1) Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\lambda), \lambda)$, $E = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \geq 1\}$ und $f(x) = |x|^{-d}$.
Dann existiert $\int_E f \, d\lambda$, aber $f \notin \mathcal{L}(E, \lambda)$.

(2) Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, aber jetzt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (statt $\mathbb{R}_{\geq 0}$).
Beh.: $f \in \mathcal{L}(\mathbb{N}, \mu)$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.
(Warum? *Hinweis:* Die separate Konvergenz der Reihen $f^+(n)$ und $f^-(n)$ ist äquivalent zur absoluten Konvergenz.) ?

Bemerkung 11.4.7. Seien $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und $E \subset \Omega$ messbar.

(1) Beh.: Ist $\mu(E) = 0$, so ist $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und es gilt $\int_E f \, d\mu = 0$.

⌈ Da jede messbare Teilmenge einer Nullmenge auch eine Nullmenge ist, ist jeder Term im Supremum in Definition 11.4.2 (ii) Null. Also sind $\int_E f_\pm d\mu = 0$. ⌋

(2) Beh.: Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a \leq f(x) \leq b$ und $\mu(E) < \infty$. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$a \, \mu(E) \ \leq \ \int_E f \, d\mu \ \leq \ b \, \mu(E) \ .$$

(Warum? *Hinweis:* Seien $a_+ = \max(0, a)$ und $b_+ = \max(0, b)$. Überlegen Sie, was aus $a_+ \leq f_+ \leq b_+$ folgt. Mit $a_- := -\min(0, a)$ gilt $a = a_+ - a_-$.) ?

(3) Sei auch $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Beh.: Angenommen $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in E$, dann $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$

(Warum? *Hinweis:* Warum gilt $f_+ \leq g_+$ und $f_- \geq g_-$? Was folgt daraus?) ?

Die Behauptung gilt auch, wenn wir nur annehmen, dass $\int_E f \, d\mu$ und $\int_E g \, d\mu$ existeren. (Warum? *Hinweis:* Fallunterscheidung.) ?

(4) Beh.: Sei $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann auch $cf \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und

$$\int_E (cf) d\mu \; = \; c \int_E f \, d\mu \; .$$

⌈ Für $c \geq 0$ folgt die Aussage aus

$$\left\{ I_E(s) \,\middle|\, 0 \leq s \leq cf_\pm \right\} = \left\{ cI_E(s) \,\middle|\, 0 \leq s \leq f_\pm \right\} \; .$$

Für $c < 0$ überlegt man sich zuerst, dass $\int f = -\int (-f)$. (Details?) ⌋ ?

Die Gleichung in der Behauptung gilt auch, falls wir nur wissen, dass $\int_E f \, d\mu$ existiert (mit $c \in \mathbb{R}$). (Warum?) ?

Jetzt möchte man natürlich sagen: $\mathcal{L}(E, \mu)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\int_E (-) d\mu$ ist $\mathbb{R}$-linear. Das ist in der Tat (fast) richtig, aber der Beweis ist einfacher, wenn wir die Konvergenzsätze aus dem nächsten Kapitel haben.

(5) Sei $A \subset E$ messbar.

Beh.: Ist $f \geq 0$, so gilt $\int_A f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$.

Beh.: Ist $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, so auch $f \in \mathcal{L}(A, \mu)$.

(Warum gelten die Behauptungen?) ?

Satz 11.4.8. Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, und sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mu)$ oder sonst zumindest $f \geq 0$. Definiere $\phi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ als

$$\phi(A) \; = \; \int_A f \, d\mu \; .$$

Dann ist ϕ eine σ-additive Mengenfunktion.

Beweis. Sei $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ mit $A_n \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt. Wir müssen zeigen

$$\phi(A) \; = \; \sum_{n=1}^\infty \phi(A_n) \; . \qquad (*)$$

(Warum ist ϕ eine Mengenfunktion?) ?

Beh. 1: $(*)$ gilt für $f = s$ einfach.

⌈ Für $s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ mit E_i messbar und paarweise disjunkt ist

$$\phi(A) = \int_A s\, d\mu \overset{\text{Lem. 11.4.4}}{=} I_A(s) = \sum_{i=1}^n c_i\, \mu(E_i \cap A)\ ,$$

$$\phi(A_n) = \int_{A_n} s\, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i\, \mu(E_i \cap A_n)\ .$$

Die Aussage folgt nun aus σ-Additivität von μ. ⌋

Beh. 2: Für $f \geq 0$ gilt $(*)$ mit „$\leq$“.

⌈ Sei $0 \leq s \leq f$ mit s einfach. Dann gilt

$$I_A(s) \overset{\text{Beh. 1}}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} s\, d\mu \overset{\text{Bem. 11.4.7 (3)}}{\leq} \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \phi(A_n)\ .$$

Dann ist aber auch das Supremum $\phi(A)$ über die $I_A(s)$ kleiner oder gleich $\sum_{n=1}^\infty \phi(A_n)$. ⌋

Beh. 3: Für $f \geq 0$ gilt $(*)$ mit „$\geq$“.

⌈ Falls für eines der A_n gilt, dass $\mu(A_n) = \infty$, dann ergibt $(*)$ die Gleichung $\infty = \infty$.

Sei nun $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $0 \leq s \leq f$ sodass für alle $i = 1, \dots, N$ gilt

$$\int_{A_i} s\, d\mu \ \geq\ \int_{A_i} f\, d\mu - \frac{\varepsilon}{N}\ .$$

(Warum geht das? *Hinweis:* Wähle für jedes A_i ein geeignetes s_i und setze zusammen.) Dann folgt, für $B := A_1 \cup \dots \cup A_N$, ?

$$\phi(A) \overset{\text{Bem. 11.4.7 (5)}}{\geq} \phi(B) = \int_B f\, d\mu \geq \int_B s\, d\mu$$

$$\overset{\text{Beh. 1}}{=} \sum_{i=1}^N \int_{A_i} s\, d\mu \geq \sum_{i=1}^N \Big(\int_{A_i} f\, d\mu - \frac{\varepsilon}{N} \Big)$$

Insgesamt gilt für alle $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, dass

$$\phi(A) \ \geq\ \sum_{i=1}^N \phi(A_i) \ -\ \varepsilon$$

Damit folgt die Behauptung. ⌋

Beh. 4: (∗) gilt für $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mu)$.

(Warum? *Hinweis:* Benutze Definition 11.4.5, also $\int f = \int f_+ - \int f_-$.) ?

□

Bemerkung 11.4.9.

(1) Sei E eine messbare Menge und seien $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Sei $N = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$. Dann ist N messbar (→Übung). Angenommen $\mu(N) = 0$ („f und g unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge"), dann

$$\int_E f \, d\mu \;=\; \int_E g \, d\mu \; .$$

(Warum? *Hinweis:* Zerlegen Sie E geeignet und wenden Sie (die endliche Version von) Satz 11.4.8 an.) ?

(2) Sei $M \subset \Omega$. Gilt eine Eigenschaft für alle $x \in M$ bis auf eine Nullmenge, so sagen wir, die Eigenschaft gilt *fast überall.* Zum Beispiel

- In Teil 1 können wir dann sagen „f ist auf E fast überall gleich g"
- Seien $f_n, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Die Aussage „$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen f" heißt: Es gibt ein $N \subset \Omega$, sodass $\mu(N) = 0$ und

$$\forall x \in \Omega \setminus N \;:\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; f(x) \; .$$

(3) Beh.: Ist $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, so ist f fast überall auf E endlich.

⌈ Schreibe $E = E_{-\infty} \cup E_{\mathbb{R}} \cup E_\infty$, wobei $E_{\pm\infty} = \{x \in E | f(x) = \pm\infty\}$ und auf $E_{\mathbb{R}}$ nimmt f Werte in $\mathbb{R}$ an. Betrachte f_+. Nach Satz 11.4.8 gilt

$$\int_E f_+ \, d\mu = \int_{E_{\mathbb{R}}} f_+ \, d\mu + \int_{E_\infty} f_+ \, d\mu$$

Aus der Definition des Integrals als Supremum folgt, dass $\int_{E_\infty} f_+ \, d\mu = \infty$, falls $\mu(E_\infty) > 0$ (Warum? *Hinweis:* Fällt Ihnen eine divergente Folge von einfachen Funktionen s ein?) ?

Für f_- folgt analog, dass $\mu(E_{-\infty}) = 0$. ⌋

Satz 11.4.10. Sei $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Dann ist auch $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und

$$\Big| \int_E f \, d\mu \Big| \;\leq\; \int_E |f| \, d\mu \; .$$

Beweis. Da $|f| = f_+ + f_-$, folgt $|f| \in \mathcal{L}(E,\mu)$ aus der Endlichkeit von $\int_E f_\pm d\mu$. Da $\pm f \le |f|$ ergibt Bemerkung 11.4.7, Teil 4 und 5, dass

$$\pm \int_E f\,d\mu = \int_E (\pm f) d\mu \le \int_E |f| d\mu \ .$$

□

Satz 11.4.11. Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und sei $g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ mit $|f| \le g$ auf E. Dann auch $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$.

Beweis. Folgt sofort aus $\int_E f_\pm d\mu \le \int_E g\,d\mu$. (Aber aus welchem vorhergehenden Resultat folgt diese Ungleichung?) □ ?

Bemerkung 11.4.12. Als Anwendung von Satz 11.4.8 zeigen wir den großen Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen. Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), \mu)$, wobei μ wieder das Zählmaß ist.

Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{N}^2, \mu)$. Setze

$$A_m = \{m\} \times \mathbb{N} \quad , \quad B_n = \mathbb{N} \times \{n\}$$

Dann gilt auch $f \in \mathcal{L}(A_m, \mu)$ und $f \in \mathcal{L}(B_n, \mu)$ (Bemerkung 11.4.7 (5)), und Satz 11.4.8 sagt:

$$\int_{\mathbb{N}^2} f\,d\mu \ = \ \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} f\,d\mu \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f\,d\mu \ .$$

Übersetzt in Reihen heißt dies: Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ irgendeine Bijektion. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(\sigma(k))$ absolut, so konvergieren auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(m,j) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} f(i,n)$$

absolut für jede Wahl von m, n, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\sigma(k)) \ = \ \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) \Big) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) \Big) \ .$$

(Warum ist das die Übersetzung in Reihen?) ?

11.5 Konvergenzsätze

Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz 11.5.1. *(Lebesguescher Satz über monotone Konvergenz)*
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\forall x \in \Omega \ : \ 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad .$$

Für alle $x \in \Omega$ setze $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Dann ist f messbar (Satz 11.3.5), und es gilt für $E \subset \Omega$ messbar, dass

$$\int_E f \, d\mu \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \ .$$

Beweis. Setze $g = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. (Warum existiert der Grenzwert überhaupt?) ?

Beh.: $g \leq \int_E f \, d\mu$.

⌈ Klar, da wegen $f_n \leq f$ auch $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f \, d\mu$ für jedes n. ⌋

Die nächste Behauptung zeigt, dass auch $g \geq \int_E f \, d\mu$ (Warum?). ?

Beh.: Sei s einfach und messbar mit $0 \leq s \leq f$. Dann $\int_E s \, d\mu \leq g$.

⌈ Sei $0 < c < 1$ beliebig. Setze

$$E_n = \{x \in E \mid f_n(x) \geq c \cdot s(x)\}$$

Dann sind alle E_n messbar (Warum?), $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, und es gilt: ?

$$\forall x \in E \ : \ \exists n \ : \ f_n(x) \geq c \cdot s(x) \ .$$

(Warum? *Hinweis:* Unterscheiden Sie die Fälle $f(x) = 0$ und $f(x) > 0$. Warum ist die Aussage falsch, wenn wir c weggelassen hätten (also wenn man $c = 1$ setzt)?) ?

Also $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

Nach Satz 11.4.8 ist $A \mapsto \int_A s \, d\mu$ eine σ-additive Mengenfunktion. Nach Satz 11.1.8 gilt daher

$$\int_E s \, d\mu \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s \, d\mu \ .$$

Für jedes einzelne Integral haben wir die Abschätzung

$$\int_{E_n} s \, d\mu \leq \int_{E_n} \frac{f_n}{c} d\mu \overset{\text{Bem. 11.4.7 (4)}}{=} \frac{1}{c} \int_{E_n} f_n \, d\mu \ .$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man $\int_E s \, d\mu \leq \frac{1}{c} g$. Da dies für alle $0 < c < 1$ gilt, folgt die Behauptung. ⌋

$\square$

Beispiel 11.5.2. Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda), \lambda)$.

(1) Ohne die Monotoniebedingung an die Folge $(f_n)_n$ ist die Aussage in Satz 11.5.1 falsch. Betrachte zum Beispiel

$$f_n(x) = n\,\chi_{[0,1/n]} \quad , \quad g_n(x) = \tfrac{1}{n}\,\chi_{[0,n]} \quad , \quad h_n(x) = \chi_{[n,n+1]} \ .$$

Jede der drei Funktionenfolgen gibt ein Gegenbeispiel (Warum?). ?

(2) Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Bijektion, also die Wahl einer Abzählung der abzählbaren Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Setze

$$f_n = \chi_{\{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)\}} \ ,$$

also $f_n(x) = 1$, falls $x = \sigma(i)$ für ein $i \in \{1,2,\dots,n\}$, und $f_n(x) = 0$ sonst. Dann ist der punktweise Grenzwert gegeben durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ = \ \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Es gilt $\int_{[0,1]} f_n d\mu = 0$ und auch $\int_{[0,1]} f\, d\mu = 0$, da sowohl f_n als auch f fast überall Null sind. Da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in jedem Punkt monoton steigend ist (und sowieso messbar ist), ist Satz 11.5.1 anwendbar, und sagt in diesem Fall $0 = \lim_{n\to\infty} 0$.

In diesem Beispiel verhält das Lebesgue-Integral sich besser als das Riemann-Integral: Die Funktion f ist auf $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar, also ist die linke Seite von Satz 11.5.1 für das Riemann-Integral gar nicht definiert, die rechte aber schon (und ergibt 0).

Satz 11.5.3. Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass $f(x)+g(x)$ für jedes $x \in \Omega$ definiert ist (also der Fall $\infty + (-\infty)$ nicht auftritt). Falls $f, g \in \mathcal{L}(E,\mu)$, dann auch $f+g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ und es gilt

$$\int_E (f+g)\, d\mu \ = \ \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu \ .$$

Beweis. Beh. 1: Die Aussage des Satzes gilt für $f, g \geq 0$

⌈ Für f, g einfach folgt dies aus Lemma 11.4.4 (ii).

Für allgemeine f, g wähle Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen, messbaren und punktweise monoton steigenden Funktionen $s_n, t_n : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad , \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x) \ .$$

wie in Satz 11.3.9. In der folgenden Rechnung kürzen wir ab $\int f = \int_E f\,d\mu$, etc. In Schritten $(*)$ wenden wir Satz 11.5.1 an.

$$\int (f+g) = \int \Big(\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) \Big) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int \big(s_n + t_n\big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\int s_n + \int t_n \Big) \overset{(*)}{=} \int f + \int g \ . \qquad \rfloor$$

Beh. 2: Die Aussage des Satzes gilt auch für die verbleibenden Kombinationen $f \geq 0$, $g \leq 0$ und $f \leq 0$, $g \geq 0$ und $f \leq 0$, $g \leq 0$.

$\lceil$ Wir zeigen den Fall $f \geq 0$, $g \leq 0$. Die anderen Fälle erhält man aus den bekannten durch $-f$, $-g$ und Bemerkung 11.4.7 (4).

Sei also $f \geq 0$ und $g \leq 0$. Setze $h = f + g$ und

$$A = \{x \in E \,|\, h(x) \geq 0\} \quad , \quad B = \{x \in E \,|\, h(x) < 0\} \ ,$$

sodass $E = A \cup B$ disjunkt. (Warum sind A und B messbar?) ?

Auf A setze $f' = h$, $g' = (-g)$. Dann $f', g' \geq 0$ (auf A) und Beh. 1 ergibt

$$\int_A (h - g) = \int_A h + \int_A (-g) \ .$$

Zusammen mit Bemerkung 11.4.7 (4) ergibt dies

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g \ .$$

Auf B setze $f' = f$ und $g' = -h$; dann $f' \geq 0$, $g' \geq 0$ und wir können Beh. 1 anwenden. Zusammen mit Satz 11.4.8 erhält man

$$\int_E (f+g) = \int_A (f+g) + \int_B (f+g) = \int_A f + \int_A g + \int_B f + \int_B g$$
$$= \int_E f + \int_E g \qquad \rfloor$$

Der allgemeine Fall folgt jetzt, indem wir E in disjunkte Teimengen zerlegen, auf denen jeweils einer der Fälle in Beh. 1 oder Beh. 2 eintritt, und dann Satz 11.4.8 anwenden. Also

$$E = E_{\geq,\geq} \cup E_{\geq,<} \cup E_{<,\geq} \cup E_{<,<}$$

mit

$$E_{\geq,\geq} = \{x \in E \,|\, f(x) \geq 0 \text{ und } g(x) \geq 0\}$$

etc. (Details?) $\square$?

Bemerkung 11.5.4. Der vorherige Satz ergibt zusammen mit Bemerkung 11.4.7 (4): Sei E messbar. Die Menge

$$V \;=\; \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f \in \mathcal{L}(E,\mu)\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Funktion

$$V \to \mathbb{R}\ ,\ \ f \mapsto \int_E f\, d\mu$$

ist $\mathbb{R}$-linear. Da $\mathcal{L}(E,\mu)$ auch Funktion enthält, die die Werte $\pm\infty$ annehmen, ist die punktweise Addition von Funktionen auf $\mathcal{L}(E,\mu)$ nicht definiert. Daher der Umweg über V.

Korollar 11.5.5. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, und sei $E \subset \Omega$ messbar. Dann

$$\int_E \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\, d\mu\ .$$

Beweis. Schreibe beide Seiten als Grenzwert von Partialsummen und wende Satz 11.5.3 und Satz 11.5.1 an. □

Satz 11.5.6. *(Satz von Fatou)*
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen mit $f_n \geq 0$. Setze

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ .$$

Dann gilt für $E \subset \Omega$ messbar,

$$\int_E f\, d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu\ .$$

Beweis. Setze $g_n(x) = \inf\{f_k(x) \,|\, k \geq n\}$. Dann gilt

- die g_n sind messbar (Lemma 11.3.4 (ii)),
- $0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$,
- $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f$.

Man kann also Satz 11.5.1 anwenden:

$$\int_E f\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu\ . \tag{$*$}$$

Da $g_n \leq f_k$ für alle $k \geq n$ gilt auch $\int g_n \leq \int f_k$ für jedes $k \geq n$, und somit

$$\int_E g_n d\mu \;\leq\; \inf\Big\{ \int_E f_k d\mu \,\Big|\, k \geq n \Big\}$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt die Behauptung. □

Beispiel 11.5.7. In Beispiel 11.5.2 (1) hatten wir den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda), \lambda)$ und die Funktionenfolgen

$$f_n(x) = n\,\chi_{[0,1/n]} \quad , \quad g_n(x) = \tfrac{1}{n}\,\chi_{[0,n]} \quad , \quad h_n(x) = \chi_{[n,n+1]} \ .$$

Diese erfüllen die Voraussetzung von Satz 11.5.6. (Was ist jeweils die Aussage des Satzes diese Folgen?) ?

Satz 11.5.8. *(Lebesguescher Satz über dominierte Konvergenz)*
Sei $E \subset \Omega$ messbar und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen. Setze

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Angenommen, es gibt $g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ mit $|f_n| \le g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann auch $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ und

$$\int_E f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \ .$$

Beweis. Beh.: $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$.

⌈ f ist messbar nach Satz 11.3.5. Nach Lemma 11.3.4 (i) ist auch $|f|$ messbar. Da $|f_n| \le g$ ist auch $|f| \le g$. Nach Bemerkung 11.4.7 (3) ist $\int_E |f|\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$. Da $f_\pm \le |f|$ zeigt dies, dass $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$. ⌋

Beh.: $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \;=\; \int_E f\,d\mu$.

⌈ Setze $h_n^\pm = g \pm f_n$. Da $|f_n| \le g$ gilt $h_n^\pm \ge 0$. Da $h_n^\pm$ sogar punktweise konvergiert, gilt insbesondere

$$\liminf_{n\to\infty} h_n^\pm(x) \;=\; g(x) \pm f(x) \ .$$

Satz 11.5.6 ergibt

$$\int_E (g \pm f)d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int_E (g \pm f_n)d\mu \ .$$

Mit Satz 11.5.3 kann man $\int g$ auf beiden Seiten abziehen. Man erhält (Wie?) ?

$$\int_E f\,d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{und} \quad \int_E f\,d\mu \;\ge\; \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \ .$$

Aber $\liminf \le \limsup$, also müssen hier beide Ungleichungen mit „=“ gelten. Aber dann $\liminf = \limsup$, was bedeutet, dass die Folge konvergiert, mit Grenzwert $\int f$ (Warum?). ⌋ ?

$\square$

Bemerkung 11.5.9.

(1) Angenommen, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ gilt nur fast überall. Dann bleibt die Aussage von Satz 11.5.8 dennoch gültig. (Warum?) (?)

(2) Falls $\mu(E) < \infty$ ist jede (endliche) konstante Funktion in $\mathcal{L}(E,\mu)$. Also reicht es in diesem Fall, ein $M > 0$ zu finden, sodass $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in E$.

(Kann man bei $\mu(E) < \infty$ immer $g =$ konst wählen oder gibt es auch Beispiele, wo dies nicht geht?) (?)

(Kann man den Satz über dominierte Konvergenz auf die drei Folgen in Beispiel 11.5.2 (1) anwenden? Was wäre die dominierende Funktion g?) (?)

Bemerkung 11.5.10. *(Integration komplexer Funktionen)*
Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (hier nehmen wir keine „Punkte bei Unendlich“ hinzu). Schreibe $f = u + iv$ mit $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir sagen f *ist messbar* falls u und v messbar sind. Für $E \in \mathcal{M}$ schreiben wir $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\mu)$ falls $u, v \in \mathcal{L}(E,\mu)$. In diesem Fall definieren wir

$$\int_E f\,d\mu \;:=\; \int_E u\,d\mu \;+\; i\int_E v\,d\mu\ .$$

Wenn der Wertebereich aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir auch $\mathcal{L}$ statt $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$. Für die folgenden Punkte seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $E \subset \Omega$ messbar.

(1) Der Betrag $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$ ist messbar und es gilt $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}(E,\mu)$. Dies folgt aus $|f| \leq |u| + |v|$ und $|u|, |v| \leq |f|$.

(2) Das Integral $\int_E (-) d\mu$ ist $\mathbb{C}$-linear. (Details? Insbesondere: Warum gilt $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$ für $c \in \mathbb{C}$?) (?)

(3) Beh.: Für $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\mu)$ gilt

$$\Big|\int_E f\,d\mu\Big| \;\leq\; \int_E |f| d\mu\ .$$

⌈ Wir müssen zeigen, dass

$$\sqrt{(\textstyle\int u)^2 + (\textstyle\int v)^2} \;\leq\; \int \sqrt{u^2 + v^2}\ .$$

Falls $\int v = 0$, so stimmt die Aussage (Warum?). Falls $\int v \neq 0$, kann man f durch cf ersetzen mit $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, sodass $c\int f \in \mathbb{R}$. Dann folgt die Behauptung aus $|\int cf| = |\int f|$ (Details?). ⌋ (?) (?)

11.6 Parameterabhängige Integrale

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 8.4 aus Königsberger 2].)

Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Weiterhin sei X ein metrischer Raum, $T \subset \Omega$ eine messbare Menge, und $f : X \times T \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass für jedes $x \in X$ fix die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ auf T integrierbar ist:

$$f(x,-) \in \mathcal{L}(T,\mu) \ .$$

Definiere $F : X \to \mathbb{C}$ als

$$F(x) = \int_T f(x,-)\, d\mu \ .$$

Satz 11.6.1. Angenommen,

(i) für jedes $t \in T$ fix ist $x \mapsto f(x,t)$ stetig auf X, und

(ii) es gibt $\phi \in \mathcal{L}(T,\mu)$, sodass $|f(x,t)| \le \phi(t)$ für alle $(x,t) \in X \times T$.

Dann ist F stetig.

Beweis. Sei $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig mit $x_n \to x$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$.

Setze $g(t) = f(x,t)$ und $g_n(t) = f(x_n,t)$. Da f für jedes t in x stetig ist, gilt

$$\forall t \in T \ : \ \lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t) \ .$$

Da $|g_n| \le \phi$ folgt aus dem Satz über dominiert Konvergenz (Satz 11.5.8), dass

$$\int_T g\, d\mu \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_T g_n\, d\mu \ .$$

□

Beispiel 11.6.2. Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda), \lambda)$. Dieses Beispiel zeigt, dass die Dominanzbedingung (ii) in Satz 11.6.1 nicht weggelassen werden darf.

Wähle $X = [-1,1]$, $T = \mathbb{R}_{\ge 0}$

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & ; x \le 0 \\ x(1-tx) & ; x > 0 \text{ und } t \le x^{-1} \\ 0 & ; x > 0 \text{ und } t > x^{-1} \end{cases}$$

Dann ist $x \mapsto f(x,t)$ für jedes t stetig (Warum?). Um $F(x)$ zu berechnen, ?

benutzen wir, dass das Lebesgue-Integral (für das Maß λ auf $\mathbb{R}$) für Riemann-integrierbare Funktionen auf endlichen Intervallen $[a, b]$ mit dem Riemann-Integral übereinstimmt (siehe Kapitel 12.1). Für $x \leq 0$ gilt $F(x) = 0$. Für $x > 0$ gilt

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f(x, -) d\lambda = \int_0^{1/x} x(1 - tx)\, dt = x\bigl(t - \tfrac{1}{2}t^2 x\bigr)\Big|_0^{1/x} = \frac{1}{2}\ .$$

Also ist F nicht stetig.

Satz 11.6.3. Sei nun $X \subset \mathbb{R}^d$ offen. Angenommen,

(i) für jedes $t \in T$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig differenzierbar auf X, und

(ii) es gibt $\phi \in \mathcal{L}(T, \mu)$, so dass $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)| \leq \phi(t)$ für alle $(x, t) \in X \times T$ und $i = 1, \dots, d$.

Dann ist F stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, -)\, d\mu\ .$$

Beweis. Wir zeigen, dass F stetig partiell differenzierbar ist. Sei $i \in \{1, \dots, d\}$ und $x \in X$. Da X offen ist, ist für $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ und h klein genug die Funktion

$$q(h, t) \;=\; \frac{f(x + he_i, t) - f(x, t)}{h}$$

wohldefiniert. Da f partiell differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{h \to 0} q(h, t) = \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)\ .$$

Ferner ist $t \mapsto q(h, t)$ messbar (Warum?). ?

Beh.: $|q(h, t)| \leq \phi(t)$.

$\lceil$ Dies folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Dieser gibt uns ein ξ zwischen 0 und h, sodass

$$f(x + he_i, t) - f(x, t) \;=\; h\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i, t)\ .$$

Für q bedeutet dies, dass $q(h, t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i, t)$, und da die partiellen Ableitungen auf ganz X durch $\phi(t)$ beschränkt sind, folgt die Behauptung. $\rfloor$

Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $h_n \neq 0$ und $h_n \to 0$. Aus dem Satz über dominiert Konvergenz (Satz 11.5.8) folgt

$$\int_T \underbrace{\Big(\lim_{n\to\infty} q(h_n,-)\Big)}_{=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,-)} d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_T q(h_n,-)d\mu}_{=\frac{1}{h_n}(F(x+h_ne_i)-F(x))}$$

Insbesondere existiert der Grenzwert auf der rechten Seite (und ist per Definition gleich $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$). Dass die Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ stetig sind folgt nun aus Satz 11.6.1 (Wie?). □ ?

Beispiel 11.6.4. Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda), \lambda)$. Die Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension („dünner Stab") lautet

$$\tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) \;=\; \tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)\ . \qquad (*)$$

Hier ist $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ als genügend oft differenzierbar vorausgesetzt. Man kann Lösungen dieser Gleichung durch Integrale beschreiben. Betrachte dazu die Funktion $H : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$,

$$H(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\big(-\tfrac{x^2}{4t}\big)\ .$$

Diese erfüllt $(*)$ ($\to$Übung). Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare, beschränkte Funktion. Definiere $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$, $T = \mathbb{R}$ und $f : X \times T \to \mathbb{R}$,

$$f\big((x,t),y\big) = v(y)\,H(x-y,t)\ .$$

Dann ist $f\big((x,t),-\big) \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\lambda)$, und f (und die Ableitung nach x) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 11.6.3. Es folgt (Details $\to$Übung), dass

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t,-)\,d\lambda$$

die Gleichung $(*)$ löst.

Bemerkung 11.6.5. In den Sätzen 11.6.1 und 11.6.3 genügt es, wenn Bedingungen (i) und (ii) nur fast überall gelten. Denn seien (i) und (ii) für alle $t \in T\setminus N$ erfüllt, wobei N eine Nullmenge ist, so gelten die Aussagen jeweis für $F(x) = \int_{T\setminus N} f(x,-)\,d\mu$ und $\int_{T\setminus N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,-)\,d\mu$, und die Integrale ändern sich nicht wenn wir N hinzunehmen.

11.7 Die Räume L^1 und L^2

Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 11.7.1. Für $p \geq 1$ sei

$$\mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } |f|^p \text{ integierbar}\} .$$

Für $f \in \mathcal{L}^p$ setze $\|f\|_p = \big(\int_\Omega |f|^p d\mu\big)^{1/p}$.

■ Wir werden uns im Folgenden auf die Fälle $p = 1$ und $p = 2$ beschränken.

Beispiel 11.7.2.

(1) $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$, μ ist das Zählmaß: Dann $\mathcal{L}^p = \mathrm{Fun}(\Omega, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$. Mit $f = (f(1), \ldots, f(n))$ ist

$$\|f\|_p \;=\; \big(|f_1|^p + \cdots + |f_n|^p\big)^{1/p} .$$

(Warum?) Es gilt $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$. ?

(2) $\Omega = \mathbb{N}$, Rest wie in (1): Betrachte $p = 1$. Dann besteht $\mathcal{L}^1$ aus Folgen $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\int_\Omega |f|\, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \;<\; \infty ,$$

siehe Beispiel 11.4.3 (2). Also besteht $\mathcal{L}^1$ in diesem Fall genau aus den absolut konvergenten Reihen. Es gilt $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(3) $\Omega = \mathbb{R}$ mit Lebesgue-Maß: Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+|x|)^{-1}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^2$, aber $f \notin \mathcal{L}^1$. Insbesondere ist f nicht integrierbar. (Warum? ? *Hinweis:* Sie dürfen als Vorgriff auf Kapitel 12.1 schon benutzen, dass $\int_{[1,\infty)} x^{-\alpha} d\lambda < \infty$ genau dann, wenn $\alpha > 1$.)

(4) $\Omega = \mathbb{R}$ mit Lebesgue-Maß: Sei $f \in \mathcal{L}^p$ mit $f \neq 0$ aber fast überall 0. Z.B. $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann $f \neq 0$ aber $\|f\|_p = 0$.

Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}^p$ die Teilmenge der stetigen Funktionen. (Oder äquivalent: $\mathcal{C}$ besteht aus allen stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die $\int_\mathbb{R} |g|^p\, d\lambda < \infty$.) Für $g \in \mathcal{C}$ gilt: $\|g\|_p = 0 \Leftrightarrow g = 0$. ($\to$Übung [Z4A3])

Lemma 11.7.3. Sei $p \in \{1, 2\}$. Sei $f, g \in \mathcal{L}^p$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann

(1) $cf \in \mathcal{L}^p$ und $\|cf\|_p = |c|\, \|f\|_p$.

(2) $f + g \in \mathcal{L}^p$ und $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Der Beweis ist eine →Übung [Z5A3].

Definition 11.7.4. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine *Norm* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, sodass folgende Bedingungen für alle $x, y \in V$ und $c \in \mathbb{K}$ gelten:

(N1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. *(Positivität)*

(N2) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$. *(Homogenität)*

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(Dreiecksungleichung)*

Erfüllt $\|\cdot\|$ die Bedingungen (N2) und (N3), aber statt (N1) die schwächere Bedingung

(N1′) $\|x\| \geq 0$,

so nennt man $\|\cdot\|$ eine *Halbnorm*.

(Jede Norm definiert auch eine Metrik via $d(x, y) = \|x - y\|$. Details?) ?

Bemerkung 11.7.5.

(1) Jede Norm ist also insbesondere eine Halbnorm. Die Richtung „⇐“ in (N1) gilt schon wegen (N2) mit $c = 0$ und ist deswegen in (N1′) nicht nochmal aufgeführt.

(2) Nach Lemma 11.7.3 gilt für $p = 1, 2$: $\mathcal{L}^p$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$.
Zur Information: Das gilt in der Tat für jedes $p \geq 1$ (aber nicht für $p < 1$), aber das behandeln wir hier nicht.

(3) In Beispiel 11.7.2 haben wir gesehen: Teil 1 und 2 – Für $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ oder $\Omega = \mathbb{N}$ und Zählmaß ist $\|\cdot\|_p$ $(p = 1, 2)$ eine Norm auf $\mathcal{L}^p$ (Warum gilt das bei $\Omega = \mathbb{N}$ auch für $p = 2$?). Teil 4 – Im Allgemeinen ist $\|\cdot\|_p$ keine Norm. ?

■ Erinnerung (an Analysis 1): Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiel 11.7.6.

(1) $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, $\mathbb{R}$ ist vollständig.

(2) Für $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ und Zählmaß ist $\mathcal{L}^p$ vollständig $(p = 1, 2)$. Das folgt, da $\mathbb{C}^n$ mit der Hermitischen Norm $\|\cdot\|_2$ vollständig ist und alle Normen auf $\mathbb{C}^n$ äquivalent sind.

(3) Für $\Omega = \mathbb{N}$ und Zählmaß ist $\mathcal{L}^1$ vollständig. Das folgt aus Satz 11.7.8 unten, aber man kann es auch direkt sehen (→Übung [Z5A5]).

(4) Für $\Omega = \mathbb{R}$ und Lebesgue-Maß macht die Frage noch keinen Sinn, da wir nur eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$ haben.

Aber $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}^p$ wie in Beispiel 11.7.2 (4) (stetige Funktionen g mit $\|g\|_p < \infty$) ist ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum, und die Einschränkung von $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{C}$ ist eine Norm.

$\mathcal{C}$ ist nicht vollständig.
(Warum? *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \max(1-nx, 0)$ für $x \geq 0$, und $f_n(x) = \max(1-|x|, 0)$ für $x < 0$. Warum ist das eine Cauchy-Folge? Was ist der punktweise Grenzwert? Warum kann nicht auch eine stetige Funktion bezüglich $\|\cdot\|_p$ der Grenzwert sein?) ?

Nebenbemerkung 1: Es kann passieren, dass der punktweise Grenzwert nicht stetig ist, aber die Folge trotzdem bzgl. $\|\cdot\|_p$ gegen eine stetige Funktion konvergiert. Z.B. $f_n(x) = \max(1-|nx|, 0)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Das ist eine Cauchy-Folge, sie konvergiert punktweise gegen eine nicht-stetige Funktion, und sie konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_p$ gegen die konstante Nullfunktion, die wiederum stetig ist.

Nebenbemerkung 2: In Analysis 2 hatten wir stetige Funktionen auf einem metrischen Raum (z.B. auf $\mathbb{R}$) bezüglich der sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$ angeschaut und bewiesen: Dieser Raum *ist* vollständig (gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen).

■ Auf $\mathcal{L}^p$ definiere die Relation $f \sim g :\Leftrightarrow$ (f ist fast überall gleich g). Dies ist eine Äquivalenzrelation (→Übung [Z4A4]). Definiere

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \; := \; \mathcal{L}^p / \sim \; .$$

Wir schreiben $\underline{f}$ für die Klasse von $f \in \mathcal{L}^p$.
(Alternativ: L^p ist der Quotientenvektorraum von $\mathcal{L}^p$ bezüglich des Unterraumes aller Funktionen, die fast überall Null sind. Warum?) ?

Satz 11.7.7. Sei $p \in \{1, 2\}$. L^p ist ein Vektorraum, und $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf L^p.

Beweis. Bei der Definition als Quotientenvektorraum ist für den ersten Teil nichts zu tun. Bei der Definition via $\sim$ erklärt man Skalarmultiplikation und Vektoraddition auf L^p über Repräsentanten: für $f, g \in \mathcal{L}^p$ und $c \in \mathbb{C}$,

$$\underline{f+g} := \underline{f} + \underline{g} \quad , \quad c\,\underline{f} := \underline{cf} \; .$$

Dann prüft man, dass dies wohldefiniert ist (→Übung [Z4A4]) und macht so L^p zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Falls $f \sim g$, so gilt $\|f\|_p = \|g\|_p$, also ist $\|\cdot\|_p$ auf L^p wohldefiniert. (Wir benutzen die gleiche Notation.)

Beh.: $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf L^p.

⌈ Dies folgt sofort aus der Beobachtung, dass für $g \geq 0$ integrierbar gilt: aus $\int_\Omega g\, d\mu = 0$ folgt, dass g fast überall 0 ist (→Übung [Z4A3]). ⌋

□

Satz 11.7.8. *(Fischer-Riesz)*
Sei $p \in \{1, 2\}$. L^p ist vollständig.

Beweis. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in L^p (also $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall m, n \geq N : \|v_m - v_n\|_p < \varepsilon$).

Zu zeigen: Es gibt $u \in L^p$, sodass $\lim_{n\to\infty} \|v_n - u\|_p = 0$.

Beh. 1: Es genügt, Cauchy-Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu betrachten mit

$$\forall m, n \geq N : \|v_m - v_n\|_p < 2^{-N} .$$

(Warum? *Hinweis:* Das ist eine Analysis 1 Aussage über Cauchy-Folgen in metrischen Räumen. Man kann wie folgt vorgehen: Für eine beliebige Cauchy-Folge geht man zu einer Teilfolge mit der gewünschten Eigenschaft über. Wenn die Teilfolge einen Grenzwert hat, so auch die Cauchy-Folge, und dieser ist dann eindeutig.) ?

Sei also (v_n) wie in Beh. 1 und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p$, sodass $v_n = \underline{f_n}$.

Setze $g_k(x) = \sum_{i=1}^k |f_{i+1}(x) - f_i(x)|$ und $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$.

Beh. 2: g^p ist integrierbar.

⌈ Die g_k sind alle messbar (Warum?), und für alle $x \in \Omega$ gilt $0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots$. Dann ist auch $(g_k)^p$ messbar, es gilt $0 \leq g_1(x)^p \leq g_2(x)^p \leq \cdots$, und $g(x)^p = \lim_{k\to\infty} g_k(x)^p$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 11.5.1) ist g^p messbar, und es gilt ?

$$\int_\Omega g^p\, d\mu \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (g_k)^p\, d\mu \;.$$

Ferner gilt

$$\left(\int (g_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|g_k\|_p = \Big\| \sum_{i=1}^k |f_{i+1} - f_i| \Big\|_p \leq \sum_{i=1}^k \underbrace{\|f_{i+1} - f_i\|_p}_{<2^{-i}} < 1 \;.$$

Also auch $\int (g_k)^p < 1$ für alle k, und im Grenzübergang dann $\int g^p \leq 1$. ⌋

Nach Bemerkung 11.4.9 (3) ist g^p fast überall endlich. Sei also $N \subset \Omega$ eine Nullmenge, sodass g^p (und damit auch g) auf $\Omega \setminus N$ endlich ist.

Beh. 3: Für alle $x \in \Omega \setminus N$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$.

(Warum? *Hinweis:* Da $g_k(x)$ konvergiert, erfüllt $\sum_{i=1}^{\infty} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|$ das Cauchy-Kriterium für Reihen. Benutzen Sie dies, um $|f_m(x) - f_n(x)|$ abzuschätzen.) ?

Nach Beh. 3 gibt es auf $\Omega \setminus N$ eine punktweise Grenzfunktion. Wir definieren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & ; x \in \Omega \setminus N \\ 0 & ; x \in N \end{cases} \qquad .$$

Da jedes f_n messbar ist, ist auch der punktweise Grenzwert f messbar (Satz 11.3.5).

Beh. 4: $f \in \mathcal{L}^p$ und $\|f - f_n\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.

⌈ Für gegebenes $l \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktionen $h_k : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h_k(x) = |f_k(x) - f_l(x)|$. Dann ist h_k messbar und ≥ 0. Per Konstruktion gilt auf $\Omega \setminus N$, dass $\lim_{k\to\infty} h_k(x)^p = |f(x) - f_l(x)|^p$. Aus dem Satz von Fatou (Satz 11.5.6) folgt

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus N} |f - f_l|^p \, d\mu \;&\leq\; \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus N} |f_k - f_l|^p \, d\mu \;=\; \liminf_{k\to\infty} \big(\|f_k - f_l\|_p\big)^p \\ &=\; \liminf_{k\to\infty} \big(\|v_k - v_l\|_p\big)^p \; . \qquad (*)\end{aligned}$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ (Warum?). Also auch ?

$$\begin{aligned}|f(x)|^p &= |(f(x) - f_l(x)) + f_l(x)|^p \\ &\leq 2^{p-1}\big(|f(x) - f_l(x)|^p + |f_l(x)|^p\big) \; . \qquad (**)\end{aligned}$$

Da die rechte Seite von $(*)$ für alle l endlich ist (da $(v_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist), ist die rechte Seite von $(**)$ integrierbar. Also ist auch $|f(x)|^p$ integrierbar.

Im Grenzübergang $l \to \infty$ geht die rechte Seite von $(*)$ gegen 0 (Cauchy-Folge), also $(\|f - f_l\|_p)^p \to 0$ für $l \to \infty$. ⌋

Nach Beh. 4 können wir setzen $u = \underline{f} \in L^p$ und es gilt $\|v_n - u\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. □

Also ist L^p für $p = 1, 2$ ein Banachraum. Für $p = 2$ ist es sogar ein Hilbertraum (hat ein Skalarprodukt) ($\rightarrow$Übung [Z5A6]).

Nebenbemerkung zur Information: $\mathcal{L}^p$ ist für jedes $p \geq 1$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Halbnorm $\| \cdot \|_p$. Der Quotientenraum L^p ist für alle $p \geq 1$ ein vollständiger normierter Vektorraum, d.h. L^p ist ein Banachraum. Dies ist der eigentliche Satz von Fischer-Riesz (und nicht nur der Fall $p = 1, 2$).

12 Lebesgue-Integration im $\mathbb{R}^d$

Im vorherigen Kapitel hatten wir uns allgemeine Maßräume und deren Lebesgue-Integral angesehen. In diesem Kapitel beschränken wir uns auf das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^d$ (für verschiedene d). D.h. wir arbeiten hier mit dem Maßraum

$$\big(\mathbb{R}^d\,,\,\mathcal{M}(\lambda)\,,\,\lambda\big)\ .$$

„Messbare Menge“ bedeutet immer „enthalten in $\mathcal{M}(\lambda)$“, und „messbare Funktion“ bedeutet immer „messbar bezüglich $\mathcal{M}(\lambda)$“. Für $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar schreiben wir

$$\mathcal{L}(A) \ := \ \mathcal{L}(A, \lambda)$$

für die bezüglich λ auf A Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

12.1 Vergleich mit dem Riemann-Integral

Zur Erinnerung hier die Definition des Riemann-Integrals aus Analysis 2.

■ Wir definieren die Teilmenge $\mathcal{T}(a,b) \subset \mathrm{Fun}([a,b],\mathbb{R})$ der *Treppenfunktionen* wie folgt: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{T}(a,b)$ genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}$, sowie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

und $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für $i = 0, \dots, n-1$ und $x \in [a,b]$ gilt:

$$x_i < x < x_{i+1} \quad \Rightarrow \quad f(x) = c_i\ .$$

Die Werte von f an den Sprungstellen x_i dürfen beliebig sein.

■ Sei $f \in \mathrm{Fun}([a,b],\mathbb{R})$ beschränkt. Wir definieren

$$\text{(Oberintegral)} \qquad \int_a^{b*} f(x)\,dx = \inf\Big\{\int_a^b \overline{\varphi}(x)dx \,\Big|\, \overline{\varphi} \in \mathcal{T}(a,b) \text{ und } \overline{\varphi} \geq f\Big\}\ ,$$

$$\text{(Unterintegral)} \qquad \int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_a^b \underline{\varphi}(x)dx \,\Big|\, \underline{\varphi} \in \mathcal{T}(a,b) \text{ und } \underline{\varphi} \leq f\Big\}\ .$$

Falls Ober- und Unterintegral gleich sind, heißt f *Riemann-integrierbar*, und wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,dx \ := \ \int_{a*}^b f(x)\,dx \ = \ \int_a^{b*} f(x)\,dx\ .$$

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen nennen wir

$$\mathcal{R}(a,b) \ \subset \ \mathrm{Fun}([a,b],\mathbb{R})\ .$$

Zur besseren Unterscheidung schreiben wir in diesem Kapitel

$$\text{Riemann-Integral} : \mathcal{R}\!\!\int_a^b \quad , \quad \text{Lebesgue-Integral} : \mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} \quad .$$

Satz 12.1.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) $f \in \mathcal{R}(a,b)$ genau dann, wenn f fast überall stetig ist.

(ii) Falls $f \in \mathcal{R}(a,b)$, dann auch $f \in \mathcal{L}([a,b])$ und es gilt

$$\mathcal{R}\!\!\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} f\,d\lambda \;.$$

■ *Achtung:* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $N \subset [a,b]$ eine Nullmenge. Folgende zwei Aussagen sind *nicht* äquivalent:

(1) Die auf $[a,b]$ definiert Funktion f ist in jedem Punkt $x \in [a,b] \setminus N$ stetig.

(2) Sei $g : [a,b] \setminus N \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $[a,b] \setminus N$, also $g(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b] \setminus N$. Die Funktion g ist in jedem Punkt $x \in [a,b] \setminus N$ stetig.

(Warum? Fällt Ihnen ein Beispiel ein?) Die Bedingung „f ist fast überall stetig“ ist Bedingung (1), nicht Bedingung (2). ?

Beweis von Satz 12.1.1.

Beh. 1: Sei $\varphi \in \mathcal{T}(a,b)$. Dann $\varphi \in \mathcal{L}([a,b])$ und

$$\mathcal{R}\!\!\int_a^b \varphi(x)\,dx \;=\; \mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} \varphi\,d\lambda$$

(Warum?) ?

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Seien $\overline{\varphi}_n$ und $\underline{\varphi}_n$ Folgen in $\mathcal{T}(a,b)$ mit $\underline{\varphi}_n \le f \le \overline{\varphi}_n$ und

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}\!\!\int_a^b \overline{\varphi}_n(x)dx \;=\; \int_a^{b*} f(x)\,dx \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}\!\!\int_a^b \underline{\varphi}_n(x)dx \;=\; \int_{a*}^b f(x)\,dx \;.$$

Wir können annehmen, dass

- Dass die Partition von $[a,b]$ für $\overline{\varphi}_{n+1}$ die von $\overline{\varphi}_n$ enthält (Verfeinerung), und dito für $\underline{\varphi}_n$.

- für alle $x \in [a,b]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{\varphi}_n(x) \geq \overline{\varphi}_{n+1}(x)$ (punktweise monoton fallend) und $\underline{\varphi}_n(x) \leq \underline{\varphi}_{n+1}(x)$ (punktweise monoton steigend).

(Warum geht das alles?) Für $x \in [a,b]$ setze ?

$$\overline{\psi}(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_n(x) \quad , \quad \underline{\psi}(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \underline{\varphi}_n(x) \;.$$

Da die Folgen $\overline{\varphi}_n(x)$, $\underline{\varphi}_n(x)$ monoton und beschränkt sind, existieren die Grenzwerte (in $\mathbb{R}$). Da $\overline{\varphi}_n, \underline{\varphi}_n$ messbar sind, sind auch $\overline{\psi}, \underline{\psi}$ messbar (Satz 11.3.5).

Beh. 2: $\overline{\psi}, \underline{\psi} \in \mathcal{L}([a,b])$ und

$$\mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} \overline{\psi}\, d\lambda \;=\; \int_a^{b\,*} f(x)\, dx \quad , \quad \mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} \underline{\psi}\, d\lambda \;=\; \int_{a\,*}^{b} f(x)\, dx \;.$$

⌈ Wir wenden den Satz über dominierte Konvergenz an (Satz 11.5.8). Aufgrund der Monotonie von $\overline{\varphi}_n$, $\underline{\varphi}_n$ gibt es $M \geq 0$, sodass $|\overline{\varphi}_n| \leq M$ und $|\underline{\varphi}_n| \leq M$. Da $\lambda([a,b]) = b - a < \infty$ können wir $g(x) = M$ als integrierbare Majorante nehmen. Dann

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} \overline{\psi}\, d\lambda &\overset{\text{Satz } 11.5.8}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} \overline{\varphi}_n\, d\lambda \\ &\overset{\text{Beh. 1}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}\!\!\int_a^b \overline{\varphi}_n(x) dx \;=\; \int_a^{b\,*} f(x)\, dx \;,\end{aligned}$$

und genauso für $\underline{\psi}$. ⌋

Beh. 3: $f \in \mathcal{R}(a,b)$ genau dann, wenn $\underline{\psi} = f = \overline{\psi}$ fast überall. In diesem Fall gilt Folgerung (ii) aus dem Satz.

⌈ $\Rightarrow$: Da f Riemann-integrierbar ist, sind Ober-und Unterintegral gleich. Nach Beh. 2 gilt dann

$$\mathcal{L}\!\!\int_{[a,b]} (\overline{\psi} - \underline{\psi}) d\lambda \;=\; 0$$

Da $\underline{\psi} \leq f \leq \overline{\psi}$, ist auch $\overline{\psi} - \underline{\psi} \geq 0$. Daher muss $\overline{\psi} - \underline{\psi}$ fast überall 0 sein ($\to$Übung [Z4A3]). Also auch $\underline{\psi} = f = \overline{\psi}$ fast überall.

$\Leftarrow$: Nach Beh. 2 sind Ober- und Unterintegral gleich, also ist f Riemann-integrierbar.

Sei also $\underline{\psi} = f = \overline{\psi}$ fast überall. Dann ist f messbar (Warum?), ?

$f \in \mathcal{L}([a,b])$ (Beh. 2) und

$$\mathcal{L}\!\int_{[a,b]} \underline{\psi}\, d\lambda = \mathcal{L}\!\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \mathcal{L}\!\int_{[a,b]} \overline{\psi}\, d\lambda \ .$$

Andererseits sind nach Beh. 2 alle diese Ausdrücke gleich dem Riemann-Integral. $\rfloor$

Beh. 4: $\underline{\psi} = f = \overline{\psi}$ fast überall genau dann, wenn f fast überall stetig ist.

(→Übung [Z6A2])

Beh. 4 zeigt Teil (i) und Beh. 3 zeigt Teil (ii). $\square$

Bemerkung 12.1.2. Ein uneigentliches Riemann-Integral kann existieren, obwohl das Lebesgue-Integral nicht existiert:

(1) Sei $-\infty < A < B \leq +\infty$, und sei $f : [A,B) \to \mathbb{R}$ fast überall stetig und auf allen abgeschlossenen Intervallen $[A,b]$, $A < b < B$, beschränkt (dann $f_{[A,b]} \in \mathcal{R}(A,b)$ für alle $A < b < B$ nach Satz 12.1.1). Dann

$$\mathcal{R}\!\int_A^B f(x)\, dx \ := \ \lim_{b \to B} \mathcal{R}\!\int_A^b f(x)\, dx \ .$$

Hier sind zwei Bedingungen, wann das uneigentliche Riemann-Integral gleich dem Lebesgue-Integral ist (→Übung [Z6A3]):

(a) Angenommen, es gilt $f \geq 0$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\!\int_{[A,B)} f\, d\lambda \ = \ \lim_{b \to B} \mathcal{R}\!\int_A^b f(x)\, dx \ \in \ \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \ .$$

D.h. das Lebesgue-Integral ist endlich/unendlich genau, dann wenn der Grenzwert auf der rechten Seite in $\mathbb{R}$ existiert / nach unendlich divergiert.

(b) Angenommen, es gibt $g \geq 0$ mit $g \in \mathcal{L}([A,B))$ und $|f| \leq g$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\!\int_{[A,B)} f\, d\lambda \ = \ \mathcal{R}\!\int_A^B f(x)\, dx \ .$$

Analoge Aussagen gelten, falls das Riemann Integral an der unteren Grenze uneigentlich ist (oder an beiden).

(2) Wenn weder (a) noch (b) oben erfüllt sind, kann es passieren, dass $\mathcal{R}\!\int$ einen endlichen Wert annimmt, aber $\mathcal{L}\!\int$ nicht existiert. Ein Beispiel ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

$$f \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n-1,n)} \;.$$

Dann

$$\mathcal{R}\!\int_0^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \mathcal{R}\!\int_0^{b} f(x)\,dx \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \;=\; -\ln(2)\;,$$

aber

$$\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f\,d\lambda$$

existiert nicht. (Warum? *Hinweis:* Was sind f_+ und f_- hier?) ?

Ab jetzt verwenden wir nur noch das Lebesgue-Integral und nicht mehr das Riemann-Integral. Wir benutzen aber dennoch die Schreibweise, die wir vom Riemann-Integral gewöhnt sind. D.h. für das Lebesgue-Integral in $\mathbb{R}^d$ mit $d = 1$ schreiben wir

$$\int_{(a,b)} f\,d\lambda \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\;,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Beide Ausdrücke stehen für das Lebesgue-Integral.

12.2 Der Satz von Fubini

In diesem Kapitel schreiben wir $\mathbb{R}^d = X \times Y$ mit $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ und $p + q = d$. Für $f \in \mathcal{L}(X \times Y)$, $g \in \mathcal{L}(X)$ und $h \in \mathcal{L}(Y)$ schreiben wir

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(x,y) \quad , \quad \int_X g(x)\,dx \quad , \quad \int_Y h(y)\,dy$$

für die entsprechenden Lebesgue-Integrale. Wenn wir die Dimension im Lebesgue-Maß betonen wollen, schreiben wir λ_n für das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$.

Ziel des Kapitels ist, zu zeigen:

Satz 12.2.1. *(Satz von Fubini)*
Sei $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X \times Y)$.

(i) Es gibt eine Nullmenge $N \subset Y$, sodass für jedes $y \in Y \setminus N$ gilt: Die Funktion $X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x,y)$ ist messbar und auf X integrierbar (d.h. $f(-,y) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X)$).

(ii) Sei $N \subset Y$ eine Nullmenge wie in (i). Setze

$$F(y) \;=\; \begin{cases} \int_X f(x,y)\,dx & ; y \in Y \setminus N \\ 0 & ; y \in N \end{cases} \quad .$$

Dann $F \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(Y)$ und es gilt

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\,d(x,y) \;=\; \int_Y F(y)\,dy \; .$$

Der Beweis kommt am Ende des Kapitels.

Bemerkung 12.2.2.

(1) Wir können die Aussage von Teil (ii) auch so schreiben:

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\,d(x,y) \;=\; \int_{Y \setminus N} \Big(\int_X f(x,y)\,dx \Big) dy \; .$$

(2) Sei $f \in \mathcal{L}(X \times Y)$. Für $y \in Y$ setze $h_y : X \to \mathbb{C}$, $h_y(x) = f(x,y)$ wie in Teil (i) des Satzes. Dann kann es sein, dass h_y nicht für alle y messbar ist. Sei z.B. $X = Y = \mathbb{R}$ und $Z \subset \mathbb{R} = X$ eine in $\mathbb{R}$ nicht messbare Teilmenge. Setze $f(x,y) = 0$ für $y \neq 0$ und $f(x,0) = \chi_Z(x)$. Dann gilt:

- Die Funktion h_y ist messbar für $y \neq 0$ aber nicht messbar für $y = 0$.
- Die Funktion f ist messbar, denn $\{x | f(x,y) > a\}$ ist entweder $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$, oder $Z \times \{0\}$ (Warum?). Die letzte Menge ist Teilmenge von $\mathbb{R} \times \{0\}$, was eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist. Also ist auch $Z \times \{0\}$ eine Nullmenge und damit messbar. ?

Es gilt auch $f \in \mathcal{L}(X \times Y)$, da $\int |f|\,d(x,y) = 0$.

(3) Sei $f \in \mathcal{L}(X \times Y)$. Definiere $g : Y \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g(y,x) = f(x,y)$. Dann $g \in \mathcal{L}(Y \times X)$ und es gilt ($\to$Übung [Z6A5])

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\,d(x,y) \;=\; \int_{Y \times X} g(y,x)\,d(y,x) \; .$$

Nach dem Satz von Fubini gibt es also Nullmengen $M \subset X$ und $N \subset Y$, sodass

$$\int_{X \setminus M} \Big(\int_Y f(x,y)\, dy \Big) dx \;=\; \int_{Y \setminus N} \Big(\int_X f(x,y)\, dx \Big) dy \;.$$

In diesem Sinn spielt die Integrationsreihenfolge bei iterierten Integralen keine Rolle.

(4) Man könnte versuchen, die Bedingungen im Satz von Fubini wie folgt abzuschwächen: Sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ messbar (aber wir fordern nicht, dass $f \in \mathcal{L}(X \times Y)$), und

- die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ ist für fast alle y über X integrierbar,
- die Funktion F aus Teil (ii) des Satzes erfüllt $F \in \mathcal{L}(Y)$.

Aber dann folgt nicht, dass $f \in \mathcal{L}(X \times Y)$ und die Aussage ist falsch.

Hier ein Beispiel dazu (Details →Übung [Z1A2]). Sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ die Funktion, die nur für $x, y \in (0,1)$ durch

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

gegeben ist, und sonst Null ist. Setze $g_y(x) = f(x,y)$ und auch $h_x(y) = f(x,y)$. Dann:

- Für alle $y \in Y$ ist $g_y \in \mathcal{L}(X)$ und für $y \in (0,1)$ gilt $G(y) = \int_X g_y(x) dx = -(y+1)^{-2}$, und $G(y) = 0$ sonst. Dann also auch $G \in \mathcal{L}(Y)$ und

$$\int_Y G(y) dy \;=\; \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\, dx \Big) dy \;=\; -\frac{1}{2} \;.$$

- Für alle $x \in X$ ist $h_x \in \mathcal{L}(Y)$ und für $x \in (0,1)$ gilt $H(x) = \int_Y h_x(y) dy = (x+1)^{-2}$ und $H(x) = 0$ sonst. Dann also auch $G \in \mathcal{L}(Y)$ und

$$\int_X H(x) dx \;=\; \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, dy \Big) dx \;=\; \frac{1}{2} \;.$$

Hier sind alle iterierten Integrale definiert, aber die Integrationsreihenfolge vertauscht *nicht*.

Korollar 12.2.3. Sei $E \subset X \times Y$ messbar mit $\lambda(E) < \infty$. Für $y \in Y$ definiere die Mengen $E_y = \{x \in X \,|\, (x, y) \in E\} \subset X$. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset Y$, sodass E_y für alle $y \in Y \setminus N$ messbar ist, und die Funktion $y \mapsto \lambda_p(E_y)$ auf $Y \setminus N$ integrierbar ist. Für eine solche Nullmenge N gilt

$$\lambda_d(E) \;=\; \int_{Y\setminus N} \lambda_p(E_y)\, dy \;.$$

Der Beweis des Korollars ist eine →Übung [Z6A2].

Beispiel 12.2.4. Sei $r > 0$ und sei $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le r^2\}$ die Kreisscheibe von Radius r im $\mathbb{R}^2$.

Beh.: $\lambda_2(K_r) = \pi\, r^2$.

⌈ Wir benutzen Korollar 12.2.3. Für $y \in [-r, r]$ gilt

$$E_y \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 \le r^2\} \;=\; [-h(y), h(y)] \;,$$

mit $h(y) = r\sqrt{1 - (y/r)^2}$. Für $y \notin [-r, r]$ gilt $E_y = \emptyset$. Alle E_y sind schon messbar, und die Funktion $y \mapsto \lambda_1(E_y)$ ist sogar stetig. Wir können also $N = \emptyset$ wählen. Wir erinnern uns, das $\arcsin(t)$ eine Stammfunktion von $1/\sqrt{1 - t^2}$ ist. Dann

$$\begin{aligned} \lambda_2(K_r) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(E_y)\, dy \;=\; \int_{-r}^{r} 2h(y)\, dy \;=\; 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt \\ &=\; r^2 \Big(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin(t)\Big)\Big|_{-1}^{1} \;=\; \pi r^2 \;. \end{aligned}$$ ⌋

Aber es wäre einfacher gewesen, zu sagen: „Der Umfang eines Kreises von Radius s ist $2\pi s$, und dann integriere ich einfach $\int_0^r 2\pi s\, ds = (\pi s^2)|_0^r = \pi r^2$." Das geht jetzt noch nicht, aber mit dem Transformationssatz im nächsten Kapitel geht etwas Ähnliches.

Ab jetzt wenden wir uns dem Beweis des Satzes von Fubini zu. Wir brauchen eine Reihe von Lemmas. Wir schreiben $\mathcal{L}(X \times Y)$ für $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X \times Y)$, etc.

Definition 12.2.5. Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{I_i}$$

mit $c_i \in \mathbb{C}$, $I_i \subset \mathbb{R}^n$ Intervalle, heißt *(komplexwertige) Treppenfunktion.*

Bemerkung 12.2.6.

(1) Real- und Imaginärteil einer Treppenfunktion sind einfache Funktionen im Sinne von Definition 11.3.7, aber nicht umgekehrt, da in einfachen Funktionen die charakteristischen Funktionen über allgemeinen messbaren Mengen definiert sind.

(2) Eine Funktion der Form $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ mit Elementarmengen E_i ist nach Lemma 11.2.6 eine Treppenfunktion.

(3) Der Satz von Fubini gilt für Treppenfunktionen (mit $N = \emptyset$):

Beh.: Sei $\varphi : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion. Dann gilt

$$\int_{X\times Y} \varphi(x,y)\, d(x,y) = \int_Y \Big(\int_X \varphi(x,y)dx \Big) dy \ .$$

⌈ Wegen der $\mathbb{C}$-Linearität des Integrals (Bemerkung 11.5.10 (2)) genügt es, die Behauptung im Spezialfall $\varphi = \chi_I$ für ein Intervall I zu zeigen. Dort rechnet man die Gleichheit leicht nach. (Details?) ⌋ ?

Lemma 12.2.7. Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Es gibt eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass f reellwertig ist mit $f \geq 0$. In diesem Fall zeigen wir, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ (mit Werten in $\mathbb{R}$) gibt, sodass $\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon$. Daraus folgt dann die Aussage des Lemmas. (Wie? *Hinweis:* Betrachten Sie erst allgemeine reellwertige f via $f = f_+ - f_-$ und dann komplexwertige, benutzen Sie die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_1$.) ?

Sei also $f \geq 0$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Definition des Integrals gibt es eine einfache Funktion s mit $0 \leq s \leq f$ und $\int f - \int s < \frac{\varepsilon}{2}$. Also auch

$$\|f - s\|_1 \ = \ \int |f-s| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Schreibe $s = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \chi_{A_i}$ mit $c_i > 0$ und A_i messbar. Da $\int s < \infty$ muss auch $\lambda_d(A_i) < \infty$ gelten. Also ist A_i endlich λ-messbar (siehe Definition 11.2.19 und Beh. 4 aus dem Beweis von Satz 11.2.21), und somit gibt es Elementarmengen E_i, $i = 1, \ldots, m$ mit

$$d(E_i, A_i) \ = \ \lambda(E_i \Delta A_i)) \ < \ \frac{\varepsilon}{2mc_i} \ .$$

Betrachte die Treppenfunktion $\varphi := \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$. Es gilt

$$\|s-\varphi\|_1 = \int |s-\varphi| \le \sum_{i=1}^m c_i \int \underbrace{|\chi_{A_i} - \chi_{E_i}|}_{=\chi_{(A_i \Delta E_i)}} = \sum_{i=1}^m c_i \, d(E_i, A_i) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Insgesamt $\|f-\varphi\|_1 \le \|f-s\|_1 + \|s-\varphi\|_1 < \varepsilon$. □

Lemma 12.2.8. Seien $f, f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$. Falls $\|f - f_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$, so gibt es eine Teilfolge f_{k_i} mit den Eigenschaften

(i) $\sum_{i=1}^\infty \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_1 < \infty$,

(ii) f_{k_i} konvergiert fast überall punktweise gegen f (d.h. es gibt eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^d$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$ gilt: $\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x)$).

Beweis. Dies folgt aus dem Beweis des Satzes von Fischer-Riesz (Satz 11.7.8). Teil (i) folgt aus Beh. 1 im Beweis und Teil (ii) aus Beh. 3 (Details? Die Aussage des Lemmas gilt in der gleichen Allgemeinheit wie der Satz von Fischer-Riesz. Wie lautet diese allgemeinere Formulierung des Lemmas?). □ ?

Lemma 12.2.9. Sei $E \subset X \times Y$ eine Nullmenge bezüglich λ_d. Setze $E_y = \{x \in X | (x,y) \in E\}$. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset Y$, sodass:

$$\forall y \in Y \setminus N \ : \ E_y \text{ ist Nullmenge in } X .$$

(Es kann passieren, dass für manche $y \in Y$ die Menge E_y unendliches Maß hat, oder auch gar nicht messbar ist. Fallen Ihnen dazu Beispiele ein? Das ist der Grund, warum wir die Nullmenge N brauchen.) ?

Beweis. Da das äußere Maß für alle Teilmengen von $X = \mathbb{R}^p$ definiert ist, macht der Ausdruck $\lambda_p^*(E_y)$ für alle $y \in Y$ Sinn. Wir werden zeigen: für fast alle $y \in Y$ ist $\lambda_p^*(E_y) = 0$. Da Mengen mit äußerem Maß 0 messbar sind (und damit Maß 0 haben), folgt daraus die Aussage des Lemmas.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\lambda_d^*(E) = 0$ gibt es Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$E \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k \qquad , \qquad \sum_{k=1}^\infty \lambda_d(I_k) < \varepsilon .$$

Schreibe $I_k = J_k \times K_k$ mit Intervallen $J_k \subset X$ und $K_k \subset Y$. Definiere die Funktion $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$,

$$h = \sum_{k=1}^\infty \lambda_p(J_k) \, \chi_{K_k} .$$

Beh.: Für alle $y \in Y$ gilt $\lambda^*(E_y) \le h(y)$.

⌈ Setze $Q = \bigcup_k I_k$ und $Q_y = \{x \in X | (x,y) \in Q\}$. Per Konstruktion gilt $E \subset Q$ und $E_y \subset Q_y$, sowie

$$\chi_{Q_y}(x) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{J_k}(x)\, \chi_{K_k}(y) \;.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\lambda^*(E_y) \;\leq\; \lambda^*(Q_y) \;&=\; \lambda(Q_y) \;=\; \int_X \chi_{Q_y} \\
&\leq\; \int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{J_k}(x)\, \chi_{K_k}(y) \Big) dx \;\overset{(1)}{=}\; \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{K_k}(y) \int_X \chi_{J_k}(x)\, dx \\
&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{K_k}(y)\, \lambda_p(J_k) \;=\; h(y)
\end{aligned}$$

In Schritt (1) wurde der Satz über monotone Konvergenz benutzt (Satz 11.5.1). ⌋

Für die L^1-Norm von h gilt

$$\begin{aligned}
\|h\|_1 \;&=\; \int_Y h(y)dy \;\overset{\text{mon. Konv.}}{=}\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_p(J_k) \int_Y \chi_{K_k}(y)dy \\
&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_p(J_k)\lambda_q(K_k)}_{=\lambda_d(I_k)} \;<\; \varepsilon \;.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gibt es eine Folge $h_k \in \mathcal{L}^1(Y)$ mit $\|h_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$ und $\forall y \in Y : \lambda_p^*(E_y) \leq h(y)$. Nach Lemma 12.2.8 (ii) gibt es eine Teilfolge h_{k_i}, die fast überall gegen 0 konvergiert. Also ist $\lambda_p^*(E_y)$ für fast alle $y \in Y$ gleich 0. □

Beweis von des Satzes von Fubini (Satz 12.2.1).
Aus Lemmas 12.2.7 und 12.2.8 erhält man eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $X \times Y$ und eine Nullmenge $E \subset X \times Y$, sodass

- $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$,
- $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$,
- für alle $(x,y) \in X \times Y \setminus E$ gilt $\varphi_k(x,y) \to f(x,y)$ für $k \to \infty$.

(i) Nach Lemma 12.2.9 gibt es $N' \subset Y$, sodass für alle $y \in Y \setminus N'$ die Menge $E_y \subset X$ eine Nullmenge ist. D.h. für $y \in Y \setminus N'$ gilt:

$$\varphi_k(-,y) \to f(-,y) \text{ für } k \to \infty \text{ fast überall auf } X \ .$$

Für $y \in Y$ setze

$$H_k(y) \ := \ \int_X |\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)| \, dx \ = \ \|\varphi_{k+1}(-,y) - \varphi_k(-,y)\|_{1,X} \ .$$

Hier bezeichnet $\|\cdot\|_{1,X}$ die L^1-Halbnorm bezüglich X. Da $|\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)|$ eine Treppenfunktion ist (Warum?), folgt aus Bemerkung 12.2.6 (3), dass ?

$$\int_Y H_k(y) dy \ = \ \int_{X\times Y} |\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)| d(x,y) \ = \ \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \ .$$

Mit dem Satz über monotone Konvergenz erhält man:

$$\int_Y \Big(\sum_{k=1}^{\infty} H_k(y) \Big) dy \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y H_k(y) dy \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \ < \ \infty$$

Also $\sum_{k=1}^{\infty} H_k \in \mathcal{L}(Y)$, und nach Bemerkung 11.4.9 (3) gibt es eine Nullmenge $N'' \subset Y$, sodass die Funktion $\sum_{k=1}^{\infty} H_k : Y \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ auf $Y \setminus N''$ nur endliche Werte annimmt.

Setze $N = N' \cup N''$. Per Konstruktion gilt für $y \in Y \setminus N$, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1}(-,y) - \varphi_k(-,y)\|_{1,X} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} H_k(y) \ < \ \infty \ .$$

Also ist $(\varphi_k(-,y))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(X)$ (Warum?). (Genauer gesagt sind die Klassen von $\varphi_k(-,y)$ eine Cauchy-Folge in $L^1(X)$, das unterscheiden wir hier aber nicht.) ?

Nach dem Satz von Fischer-Riesz (Satz 11.7.8) gibt es ein $g \in \mathcal{L}^1(X)$ mit $\|\varphi_k(-,y) - g\|_{1,X} \to 0$ für $k \to \infty$. Nach Lemma 12.2.8 gibt es eine Teilfolge, sodass $\varphi_{k_i}(-,y) \to g$ punktweise fast überall auf X.

Per Konstruktion haben wir auch $\varphi_k(-,y) \to f(-,y)$ punktweise fast überall auf X. Also gilt $g = f(-,y)$ fast überall auf X. Da $g \in \mathcal{L}^1(X)$ gilt damit auch $f(-,y) \in \mathcal{L}^1(X)$.

(ii) Sei N die in Teil (i) konstruierte Nullmenge. Definiere $\phi_k, F : Y \setminus N \to \mathbb{C}$,

$$\phi_k(y) \ := \ \int_X \varphi_k(x,y)\,dx \quad , \quad F(y) \ := \ \int_X f(x,y)\,dx \ .$$

(Warum ist ϕ_k messbar und in $\mathcal{L}^1(Y)$?) ?

Beh.: $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(Y)$, die auf $Y \setminus N$ punktweise gegen F konvergiert.

⌈ Es gilt

$$|\phi_{k+1}(y) - \phi_k(y)| \ \le \ \int_X |\varphi_{k+1}(x,y) - \varphi_k(x,y)|\,dx \ = \ H_k(y)$$

Das Integral über Y ergibt dann (wie in Teil (i))

$$\sum_{k=1}^\infty \|\phi_{k+1}(y) - \phi_k(y)\|_{1,Y} \ = \ \sum_{k=1}^\infty \int_Y |\phi_{k+1}(y) - \phi_k(y)|\,dy$$
$$= \ \sum_{k=1}^\infty \int_Y H_k(y)\,dy \ < \ \infty \ .$$

Also ist $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(Y)$.
Als nächstes zeigen wir die punkteweise Konvergenz gegen F.
Es gilt

$$\forall y \in Y \setminus N \ : \ \|\varphi_k(-,y) - f(-,y)\|_{1,X} \to 0 \text{ für } k \to \infty \ .$$

denn für g statt $f(-,y)$ ist das nach Teil (i) richtig, und $f(-,y)$ ist fast überall gleich g. Damit folgt für alle $y \in Y \setminus N$, dass

$$\big|\phi_k(y) - F(y)\big| \ = \ \Big|\int_X \varphi_k(x,y)\,dx \ - \ \int_X f(x,y)\,dx\Big|$$
$$\le \ \int_X \big|\varphi_k(x,y) - f(x,y)\big|dx \ = \ \|\varphi_k(-,y) - f(-,y)\|_{1,X}$$
$$\xrightarrow{k\to\infty} 0 \ .$$

⌋

Nach der obigen Behauptung und dem Satz von Fischer-Riesz (Satz 11.7.8) konvergiert $(\phi_k)_k$ gegen eine Funktion in $\mathcal{L}^1(Y)$, und mit Lemma 12.2.8

ist diese Funktion F. Insgesamt also $F \in \mathcal{L}^1(Y) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(Y)$. Wir berechnen

$$\int_Y F(y)\,dy \overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_Y \phi_k(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_Y \Big(\int_X \varphi_k(x,y)\,dx \Big) dy$$
$$\overset{\text{Bem. 12.2.6 (3)}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} \varphi_k(x,y)\,d(x,y) \overset{(2)}{=} \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(x,y)\ ,$$

wobei Gleichheit (1) folgt, da $\|\phi_k - F\|_{1,Y} \to 0$ für $k \to \infty$, und Gleichheit (2) aus $\|\varphi_k - f\|_{1,X\times Y} \to 0$ (Wieso folgen (1) und (2) aus diesen Grenzwerten? *Hinweis:* Ein ähnliches Argument wurde im Beweis der Behauptung benutzt.) ?

(Dies zeigt Teil (ii) für das spezielle N, dass in Teil (i) konstruiert wurde. Wieso gilt Teil (ii) auch für beliebige Nullmengen M, sodass $f(-,y) \in \mathcal{L}^1(X)$ für alle $y \in Y \setminus M$? *Hinweis:* Die Funktionen F aus der Aussage von Teil (ii) des Satzes, die man bezüglich N und M erhält, unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge.) ?

$\square$

Satz 12.2.10. Seien $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X)$ und $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(Y)$. Setze $u : X \times Y \to \mathbb{C}$, $u(x,y) = f(x)g(y)$. Dann $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X \times Y)$.

Beweis. Es genügt, die Aussage für reellwertige f, g mit $f, g \geq 0$ zu zeigen. Die allgemeine Aussage folgt duch geeignetes Zerlegen von f, g und Linearität des Integrals. (Details? *Hinweis:* Betrachten Sie zuerst den Fall, dass f, g reellwertig sind und schreiben Sie $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$.) ?

Beh. 1: Seien $M \subset X$ und $N \subset Y$ messbar. Dann ist $M \times N$ messbar in $X \times Y$.

⌈ Seien $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ und $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ Überdeckungen durch offene Elementarmengen $E_j \subset X$, $F_k \subset Y$. Mit $G_{jk} = E_j \times F_k$ ist dann $M \times N \subset \bigcup_{j,k} G_{jk}$ eine Überdeckung von $M \times N$ durch offene Elementarmengen in $X \times Y$ (Warum ist G_{jk} eine Elementarmenge?). Aus der Definition des äußeren Maßes als Infimum über offene Überdeckungen durch Elementarmengen erhält man folgende Ungleichung: Für M, N mit $\lambda_p(M) < \infty$ und $\lambda_q(N) < \infty$ gilt ?

$$\lambda_d^*(M \times N) \leq \lambda_p^*(M)\,\lambda_q^*(N) = \lambda_p(M)\,\lambda_q(N)\ . \qquad (*)$$

(Details? Was geht schief, wenn wir hier z.B. $\lambda_p(M) = \infty$ zulassen würden?) ?

Seien nun $M \subset X$ und $N \subset Y$ endlich λ-messbar, und seien E_n, F_n Elementarmengen mit $E_n \to M$ und $F_n \to N$. Aus $(*)$ erhält man, dass

$$E_n \times F_n \xrightarrow{n\to\infty} M \times N$$

(Wie?). Also ist $M \times N$ endlich λ-messbar in $X \times Y$. ?

Für (nicht unbedingt endlich) messbare M, N schreibe $M = \bigcup_{m=1}^\infty A_m$ und $N = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, wobei $A_m \subset X$ und $B_n \subset Y$ endlich λ-messbar sind. Wie gerade gezeigt, ist dann auch $C_{mn} = A_m \times B_n$ endlich λ-messbar in $X \times Y$. Es gilt

$$M \times N = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} ,$$

also ist $M \times N$ messbar. ⌋

Seien $s : X \to \mathbb{R}$ und $t : Y \to \mathbb{R}$ einfache und messbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $(x, y) \mapsto s(x)t(y)$ eine einfache und messbare Funktion auf $X \times Y$. (Warum?) ?

Beh. 2: Angenommen, s und t sind integrierbar. Dann

$$\int_{X\times Y} s(x)t(y)\,d(x,y) \le \int_X s(x)\,dx \int_Y t(y)\,dy .$$

⌈ Wegen der Linearität des Integrals genügt es, dies für charakteristische Funktionen zu zeigen. Für diese folgt die Behauptung aus der Ungleichung (*). ⌋

Seien $f : X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $g : Y \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ integrierbar. Setze $u : X \times Y \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, $u(x, y) = f(x)g(y)$.

Beh. 3: u ist messbar und $\int_{X\times Y} u(x, y)\,d(x, y) \le \int_X f(x)\,dx \int_Y g(y)\,dy$.

⌈ Nach Satz 11.3.9 gibt es Folgen $s_n : X \to \mathbb{R}$, $t_n : Y \to \mathbb{R}$ einfach, messbar, ≥ 0 und monoton steigend, sodass punktweise

$$s_n \to f \quad \text{und} \quad t_n \to g \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

Dann aber auch $s_n(x)t_n(y) \to u(x, y)$ punktweise. Mit dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 11.5.1) folgt, dass u messbar ist, und dass

$$
\begin{aligned}
\int_{X\times Y} u(x,y)\,d(x,y) &= \int_{X\times Y}\Big(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\,t_n(y)\Big)d(x,y)\\
&\overset{\text{m.K.}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} s_n(x)\,t_n(y)d(x,y)\\
&\overset{\text{Beh. 2}}{\leq} \lim_{n\to\infty}\int_X s_n(x)\,dx \int_Y t_n(y)\,dy\\
&= \Big(\lim_{n\to\infty}\int_X s_n(x)\,dx\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}\int_Y t_n(y)\,dy\Big)\\
&\overset{\text{m.K.}}{=} \int_X\Big(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\Big)dx\int_Y\Big(\lim_{n\to\infty} t_n(y)\Big)dy\\
&= \int_X f(x)\,dx\int_Y g(y)\,dy
\end{aligned}
$$

⌋

Da f und g integrierbar sind, folgt aus Beh. 3, dass $\int u < \infty$. □

Wir halten folgende Korollare zu Satz 12.2.10 fest:

Korollar 12.2.11. Seien $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X)$ und $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(Y)$. Dann

$$
\int_{X\times Y} f(x)g(y)\,d(x,y) = \int_X f(x)\,dx\int_Y g(y)\,dy\ .
$$

(Mit Satz 12.2.10 folgt dies direkt aus dem Satz von Fubini (Satz 12.2.1). Wie?) ?

Korollar 12.2.12. Für $M \subset X$ und $N \subset Y$ messbar ist auch $M\times N \subset X\times Y$ messbar, und es gilt

$$
\lambda_{X\times Y}(M\times N) = \begin{cases}\lambda_X(M)\lambda_Y(N) & ;\lambda_X(M)\neq 0 \text{ und } \lambda_Y(N)\neq 0\\ 0 & ;\lambda_X(M)=0 \text{ oder } \lambda_Y(N)=0\end{cases}\ .
$$

Der Beweis ist eine →Übung [Z7A2].

12.3 Der Transformationssatz

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 9 aus Königsberger 2].)

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen. Eine Abbildung $T : U \to V$ heißt *Diffeomorphismus* (oder auch $\mathcal{C}^1$-*Diffeomorphismus*), wenn T eine Bijektion ist, und wenn sowohl T also auch T^{-1} überall stetig differenzierbar sind. Die Ableitung von T in einem Punkt $x \in U$ ist eine lineare Abbildung

$$
dT(x)\ :\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\ .
$$

Die Matrixdarstellung von $dT(x)$ ist durch die partiellen Ableitungen gegeben (Satz 9.3.4).

$$\big[dT(x)\big] \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial T_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} .$$

Nach Satz 9.3.12 ist T genau dann $\mathcal{C}^1$ auf U (also stetig differenzierbar), wenn alle partiellen Ableitungen auf U existieren und stetig sind.

Für einen Diffeomorphismus T ist die lineare Abbildung $dT(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar (Warum? *Hinweis:* Per Annahme ist die Umkehrfunktion T^{-1} von T auch differenzierbar. Was sagt die Kettenregel (Satz 9.2.4) zu $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}$?) Die Determinante $\det(dT(x))$ ist also ungleich Null, und wir erhalten eine stetige Funktion

$$|\det(dT)| \;:\; U \to \mathbb{R}_{>0} \;.$$

(Die Determinante $\det(dT(x))$ wird auch *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante* genannt.)

In diesem Kapitel beweisen wir:

Satz 12.3.1. *(Transformationssatz)*
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus, und $f : V \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) auf V integrierbar. Dann ist die Funktion $f \circ T \cdot |\det dT|$ auf U integrierbar, und es gilt

$$\int_U f(T(x))\,|\det dT(x)|\,dx \;=\; \int_V f(y)\,dy \;.$$

Der Beweis wird einiges an Vorbereitung erfordern. Diese beginnt nach einer Bemerkung und einem Beispiel.

Bemerkung 12.3.2.

(1) Einen Spezialfall für $d = 1$ kennen wir schon vom Riemann-Integral: die Substitutionsregel (Satz 7.4.7). Die Substitutionsregel besagt:

> Seien $a < b$, $c < d$ und $T : [a, b] \to [c, d]$, $f : [c, d] \to \mathbb{K}$ Funktionen. Ferner sei f stetig und T auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt
>
> $$\int_a^b f(T(x))\,T'(x)\,dx \;=\; \int_{T(a)}^{T(b)} f(y)\,dy \;.$$

Für den Fall, dass $T' > 0$ auf $[a, b]$ ist das die Aussage des Transformationssatzes. (Warum? Da steht doch kein „$|\det dT|$“? Was passiert bei $T' < 0$?) ?

Im Transformationssatz wird nicht gefordert, dass f stetig ist (schwächere Voraussetzung), aber schon, dass T ein Diffeomorphismus ist (stärkere Voraussetzung).

(2) Im Transformationssatz fordern wir, dass $f : V \to \mathbb{R}$ auf V integrierbar ist. Wir könnten statt dessen auch fordern, dass $g := f \circ T \cdot |\det dT| : U \to \mathbb{R}$ auf U integrierbar ist. Dazu wendet man den Satz auf g und $S = T^{-1}$ an. (Details? *Hinweis:* Benutze die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion aus dem Satz über lokale Umkehrbarkeit (Satz 9.4.4).) ?

Beispiel 12.3.3.

(1) In Beispiel 12.2.4 hatten wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe K_r von Radius $r > 0$ bestimmt: $\lambda_2(K_r) = \pi\, r^2$. Dazu mussten wir das Integral

$$\lambda_2(K_r) \;=\; 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt$$

berechnen. Mit dem Transformationssatz können wir alternativ so vorgehen: Betrachte die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \; .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} dT(r,\varphi) \;&=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial r} & \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial T_2}{\partial r} & \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad , \\ \det dT(r,\varphi) \;&=\; r \; . \end{aligned}$$

Insbesondere ist T eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Auf $\mathbb{R}^2$ ist T nicht bijektiv. Aber es gilt:

Beh.: Mit $U = \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi)$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \le 0\}$ ist die Einschränkung $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus.

(Warum? *Hinweis:* Wenn wir $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ nehmen, ist $T(r,\varphi) = re^{i\varphi}$. Damit sieht man, dass T bijektiv ist. Dann benutzt man den Satz über lokale Umkehrbarkeit (Satz 9.4.4).) ?

Sei nun $f : V \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion $f = \chi_{K_r \cap V}$. Setze $Q_r = \{(s,\varphi) \in U \,|\, 0 < s \le r\}$. Dann gilt $T(Q_r) = K_r \cap V$, also

$$f \circ T \;=\; \chi_{Q_r} \; .$$

Der Transformationssatz sagt nun

$$\underbrace{\int_U \chi_{Q_r}(s,\varphi)\, s\, d(s,\varphi)}_{=\ 2\pi \int_0^r s\, ds\ =\ \pi r^2} \ = \ \underbrace{\int_V \chi_{K_r \cap V}\, d(x,y)}_{=\ \lambda_2(K_r \cap V)\ =\ \lambda_2(K_r)} \quad .$$

(2) Aus dem Diffeomorphismus $T : U \to V$ aus Teil 1 erhält man ein weiteres berühmtes Beispiel:

Beh.: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \ = \ \sqrt{\pi}$.

$\lceil$ Zunächst einmal ist e^{-x^2} auf ganz $\mathbb{R}$ integrierbar (Warum? *Hinweis:* $e^{-x^2} \le e^{-x}$ für $x \ge 1$.). Betrachte die Funktion $f(x,y) = e^{-x^2} e^{-y^2} = e^{-(x^2+y^2)}$. Nach Satz 12.2.10 ist $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Nach Korollar 12.2.12 ist ?

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d(x,y) \ = \ \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \Big)^2 \ .$$

Die Funktion $f \circ T : U \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(T(r,\varphi)) \ = \ \exp((r\cos\varphi)^2 + (r \sin\varphi)^2) \ = \ e^{-r^2} \ .$$

Der Transformationssatz ergibt

$$\underbrace{\int_U e^{-r^2}\, r\, d(r,\varphi)}_{=\ (*)} \ = \ \int_V f(x,y)\, d(x,y) \ .$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich dem Integral über $\mathbb{R}^2$, da V und $\mathbb{R}^2$ sich nur um eine Nullmenge unterscheiden. Das Integral auf der linken Seite läßt sich leicht berechnen:

$$(*) \ = \ 2\pi \int_0^\infty r\, e^{-r^2} dr \ \overset{\text{Bem. 12.1.2 (1a)}}{=} \ \lim_{L\to\infty} \big(-\pi e^{-r^2} \big)\Big|_{r=0}^{r=L} = \pi \ . \ \rfloor$$

Nun zum Beweis des Transformationssatzes (der Beweis folgt [Kap. 9.2 aus Königsberger 2]). Zur Vorbereitung brauchen wir ein paar Lemmas.

Lemma 12.3.4. Sei $A \in GL(d)$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Betrachte die affin-lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $T(x) = Ax + v$. Für jede Borelmenge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist auch $T(M)$ eine Borelmenge und es gilt

$$\lambda(T(M)) \ = \ |\det A| \cdot \lambda(M) \ .$$

Beweis. Sei $M \in \mathcal{B}$, d.h. M ist eine Borelmenge.

Beh. 1: $T(M)$ ist eine Borel Menge.

> $\ulcorner$ Sei $\mathcal{T} = \{T(M) \,|\, M \in \mathcal{B}\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält (Warum?). Also $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Wendet man T^{-1} auf beide Seiten an, erhält man die umgekehrte Mengeninklusion. Somit $\mathcal{T} = \mathcal{B}$. $\lrcorner$?

Für die folgenden Behauptungen sei M eine Borelmenge mit $\lambda(M) < \infty$.

Beh. 2: Sei $\pi \in S_d$ eine Permutation und $A(x) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(d)})$ eine Permutation der Koordinaten. Dann $\lambda(A(M)) = \lambda(M)$.

($\rightarrow$Übung [Z5A4]).

Beh. 3: Sei $c \in \mathbb{R}$ und $A(x) = (cx_1, x_2, \ldots, x_d)$ eine Skalierung um c in der ersten Koordinate. Dann $\lambda(A(M)) = |c|\, \lambda(M)$.

> $\ulcorner$ Für $c \geq 0$ ist das Argument genauso wie in $\rightarrow$Übung [Z6A5]. Für $c < 0$ betrachtet man zunächst den Fall $c = -1$ und zeigt, dass die äußeren Maße gleich bleiben. Beliebiges $c < 0$ erhält man dann also Komposition von Abbildungen. $\lrcorner$

Beh. 4: Sei $A(x) = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \ldots, x_d)$. Dann $\lambda(A(M)) = \lambda(M)$.

> $\ulcorner$ Wir benutzen Korollar 12.2.3. Schreibe $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ und $(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (a, b)$ mit $a = x_1$ und $b = (x_2, \ldots, x_d)$. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^{d-1}$, sodass für $b \notin N$ gilt:
>
> $$M_b = \{a \in \mathbb{R} \,|\, (a, b) \in M\}$$
>
> ist messbar und
>
> $$\lambda_d(M) = \int_{\mathbb{R}^{d-1} \setminus N} \lambda_1(M_b)\, db\ .$$
>
> Setze $E = A(M)$. Dann $E_b = M_b + x_2 \subset \mathbb{R}$ und wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes gilt $\lambda_1(E_b) = \lambda_1(M_b)$. Also auch
>
> $$\lambda_d(E) = \int_{\mathbb{R}^{d-1} \setminus N} \underbrace{\lambda_1(E_b)}_{=\lambda_1(M_b)}\, db = \lambda_d(M)\ .$$
>
> $\lrcorner$

Mit Beh. 2–4 kann man alle Zeilen- und Spaltenoperationen auf Matrixen beschreiben. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass somit jede invertierbare lineare Abbildung als eine (wiederholte) Komposition der Abbildungen in Beh. 2–4 geschrieben werden kann. Da die Determinante multiplikativ under Komposition ist, zeigt dies die Behauptung des Lemmas $M \in \mathcal{B}$ mit $\lambda(M) < \infty$. (Wie folgt daraus der Beweis für beliebige $M \in \mathcal{B}$? *Hinweis:* Zerlegen Sie $\mathbb{R}^d$ in abzählbar viele endlich-λ-messbare Mengen (z.B. Würfel mit Kantenlänge 1) und schneiden Sie diese mit M.) ? □

[Anfang des nicht klausur-relevanten Teil des Beweises des Transformationssatzes.]

Lemma 12.3.5. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Ist $N \subset U$ eine Nullmenge, dann ist auch $T(N) \subset V$ eine Nullmenge.

Beweis. Es genügt, zu zeigen, dass für jedes abgeschlossene Intervall $J \subset U$ gilt: $T(N \cap J)$ ist eine Nullmenge (Warum? *Hinweis:* Ähnlich wie in Z2A5: U ist eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen.) ?

Sei also $J \subset U$ ein abgeschlossenes Intervall. Da T eine $\mathcal{C}^1$ Abbildung ist, ist die Funktion $U \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \|dT(x)\|_{\mathrm{op}}$ (die Operatornorm, siehe Kapitel 9.1) stetig. Da J kompakt ist, nimmt die Operatornorm dort ihr Maximum (auf J) an, insbesondere ist $\|dT(x)\|_{\mathrm{op}}$ auf J beschränkt, sagen wir durch M: für alle $x \in J$ gilt $\|dT(x)\|_{\mathrm{op}} \leq M$.

Da J konvex ist, folgt aus dem Schrankensatz (Satz 9.3.10), dass für alle $p, q \in J$ gilt:

$$|T(p) - T(q)| \ \leq \ M \cdot |p - q| \ . \qquad (*)$$

(Satz 9.3.10 sagt dies erstmal für offene Mengen, warum gilt es auch für J?) ?

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $N \cap J$ eine Nullmenge ist, können wir Intervalle I_k, $k \in \mathbb{N}$ finden, die N überdecken, und die $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < \varepsilon$ erfüllen. Wir können annehmen, dass alle I_k Würfel sind, d.h. alle Kanten sind gleich lang (Warum? *Hinweis:* Man kann ein gegebenes Intervall in endlich viele Würfel einbetten, sodass das Volumen weniger als $\varepsilon 2^{-k}$ zunimmt.). Wegen $(*)$ gilt dann, dass $T(I_k)$ ein einem Würfel mit der $\sqrt{d}M$-fachen Kantenlänge enthalten ist. (Ein Würfel W mit Kantenlänge 1 ist in einem Ball mit Radius $\sqrt{d}/2$ enthalten, und somit $T(W)$ in einem Ball von Radius $M\sqrt{d}/2$, der wiederum in einem Würfel von Kantenlänge $M\sqrt{d}$ liegt.) Also ?

$$\lambda(T(I_k)) \ \leq \ (\sqrt{d}M)^d \lambda(I_k) \ ,$$

und damit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(T(I_k)) < \varepsilon\, (\sqrt{d}M)^d$. Da die $T(I_k)$ die Menge $T(N \cap J)$ überdecken, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Nebenbemerkung zur Information: Die Aussage aus Lemma 12.3.5 gilt auch für Lipschitz-stetige Funktionen. Aber stetig alleine reicht nicht: Da es surjektive, stetige Abbildungen $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ gibt, erhalten stetige Abbildungen nicht unbedingt Nullmengen. Siehe auch die Nebenbemerkung nach Bemerkung 13.1.2.

Im Beweis des Transformationssatzes taucht der Begriff des Trägers einer Funtion auf, daher hier die Definition.

Definition 12.3.6. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion. Der *Träger* $\mathrm{supp}(f)$ *von* f ist der Abschluss der Menge der Stellen an denen f nicht Null ist,

$$\mathrm{supp}(f) \ := \ \overline{\{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}} \ .$$

Beweis von Satz 12.3.1.

Beh. 1: Für jedes abgeschlossene Intervall $I \subset U$ gilt

$$\lambda(T(I)) \ \leq \ \max_{x \in I} |\det dT(x)| \cdot \lambda(I) \ .$$

⌈ Falls $\lambda(I) = 0$, dann auch $\lambda(T(I)) = 0$ nach Lemma 12.3.5, und die Behauptung ist wahr.

Sei also $\lambda(I) > 0$. Dann gibt es $\alpha \geq 0$, sodass $\lambda(T(I)) = \alpha\lambda(I)$. Setze $I_0 = I$. Indem man alle Kanten von I_0 halbiert, erhält man 2^d neue abgeschlossene Intervalle, von denen mindestens eines – nenne wir es I_1 – die Ungleichung $\lambda(T(I_1)) \geq \alpha\lambda(I_1)$ erfüllen muss (Warum?). Wiederholt man den Vorgang, erhält man eine absteigende Kette von abgeschlossenen Intervallen ?

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \subset \cdots$$

mit $\lambda(T(I_k)) \geq \alpha\lambda(I_k)$, und wobei die Kantenlängen von I_k durch 2^{-k} mal denen von I_0 gegeben sind. Da alle I_k nicht-leer und kompakt sind, ist auch der Druchschnitt aller I_k nicht leer (Lemma 8.4.10). Da die Kantenlängen gegen Null gehen, gilt

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} I_k \ = \ \{p\}$$

für ein $p \in I$. Durch Verschieben können wir annehmen, dass $p = 0$ und $T(p) = 0$. Setze $A = dT(0) \in \mathrm{GL}(d)$ und $u(x) = A^{-1}T(x)$. Dann $du(0) = \mathrm{id}$, und somit nach der Definition der Ableitung:

$$u(x) = x + |x| \cdot r(x) \ ,$$

für ein r mit $r(x) \to 0$ für $x \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle k sodass $x \in I_k \Rightarrow |r(x)| < \varepsilon$. Sei L der Durchmesser von I_0 (größte Entfernung von zwei Punkten). Dann ist der Durchmesser von I_k durch $2^{-k}L$ gegeben.

Für jede Koordinate gilt $u_i(x) = x_i + |x| r_i(x)$, und wenn x_i sich im Intervall $[a, b]$ bewegt, dann $u_i(x)$ im Intervall $[a - 2^{-k}L\varepsilon, b + 2^{-k}L\varepsilon]$. Letzteres hat die Länge

$$b - a + 2^{-k+1}L\varepsilon \;\leq\; (b-a)\left(1 + 2^{-k+1}L\varepsilon/(2^{-k}\ell)\right) ,$$

wobei ℓ die kürzeste Kantenlänge von I_0 ist. Insgesamt ist $u(I_k)$ in einem Intervall J_k enthalten, mit

$$\lambda(J_k) \;=\; (1 + 2L\varepsilon/\ell)^d \, \lambda(I_k) .$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha\lambda(I_k) \;&\leq\; \lambda(T(I_k)) \;=\; \lambda(Au(I_k)) \overset{\text{Lem. 12.3.4}}{=} |\det A| \lambda(u(I_k)) \\ &\leq\; |\det A| \lambda(J_k) \;=\; |\det A| (1 + 2L\varepsilon/\ell)^d \, \lambda(I_k) . \end{aligned}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\alpha \leq |\det A| = |\det dT(0)|$. Insbesondere

$$\alpha \;\leq\; \max_{x \in I} |\det dT(x)| .$$ ⌟

Erinnerung: Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnet M° die inneren Punkte von M, also Punkte, für die es eine Umgebung gibt, die ganz in M liegt. Per Konstruktion ist M° offen.

Beh. 2: Sei $K \subset U$ kompakt, sodass $K \setminus K^\circ$ eine Nullmenge ist. Dann

$$\min_{x \in K} |\det dT(x)| \cdot \lambda(K) \;\leq \lambda(T(K)) \;\leq\; \max_{x \in K} |\det dT(x)| \cdot \lambda(K) .$$

⌜ Da K° offen ist, können wir es als abzählbare Vereinigung von Elementarmengen E_i schreiben (→Übung [Z2A5]), $K^\circ = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$. Wir können annehmen, dass die E_i disjunkt sind (Warum? *Hinweis:* Lassen Sie induktiv aus jedem E_i die Vorhergehenden weg. Warum ist das wieder eine Elementarmenge?). Da jedes E_i als endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen geschrieben werden kann, erhalten wir disjunkte Intervalle I_k, $k \in \mathbb{N}$, mit ?

$$K^\circ \;=\; \bigcup_{k=1}^\infty I_k . \qquad (*)$$

Setze $M = \max_{x\in K} |\det dT(x)|$. Für den Abschluss $\overline{I_k}$ von I_k gilt, dass $\overline{I_k} \setminus I_k$ eine Nullmenge ist. Nach Lemma 12.3.5 ist auch $T(\overline{I_k} \setminus I_k) = T(\overline{I_k}) \setminus T(I_k)$ eine Nullmenge. Mit Beh. 1 folgt

$$\lambda(T(I_k)) \; = \; \lambda(T(\overline{I_k})) \; \leq \; M\,\lambda(\overline{I_k}) \; = \; M\,\lambda(I_k)\;. \qquad (**)$$

Setze $Q = T(K)$. Da T ein Diffeomorphismus ist, gilt auch $Q^\circ = T(K^\circ)$, und somit $Q \setminus Q^\circ = T(K \setminus K^\circ)$. Per Annahme ist $K \setminus K^\circ$ eine Nullmenge, und nach Lemma 12.3.5 ist auch $Q \setminus Q^\circ$ eine Nullmenge. Also $\lambda(K) = \lambda(K^\circ)$ und $\lambda(Q) = \lambda(Q^\circ)$. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda(Q) \; = \; \lambda(Q^\circ) \; &\overset{(*)}{=} \; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(T(I_k)) \\ &\overset{(**)}{\leq} \; M \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) \; \overset{(*)}{=} \; M\,\lambda(K^\circ) \; = \; M\,\lambda(K)\;. \end{aligned}$$

Dies zeigt die zweite Abschätzung in Beh. 2. Für die erste Abschätzung wenden wir die bereits bewiesene zweite Abschätzung auf die Umkehrabbildung $S = T^{-1}$ an. Man benutzt $dS(y) = dT(S(y))^{-1}$, sodass

$$\begin{aligned} \max_{y\in Q} |\det dS(y)| = \max_{y\in Q} |\det dT(S(y))|^{-1} = \max_{x\in K} |\det dT(x)|^{-1} \\ = \Big(\min_{x\in K} |\det dT(x)| \Big)^{-1}\;. \end{aligned}$$

(Details für den Rest des Arguments?) $\rfloor$?

Beh. 3: Der Transformationssatz gilt für jede Treppenfunktion, deren Träger in V liegt.

$\lceil$ Wegen Linearität des Integrals genügt es, die Behauptung für charakteristische Funktionen von Intervallen zu zeigen. Da sich Intervalle von ihrem Abschluss nur durch Nullmengen unterscheiden, genügt es, abgeschlossene Intervalle zu betrachten. Sei also $I \subset V$ ein abgeschenes Intervall und $f = \chi_I$.

Wir müssen zeigen: a) $g(x) := f(T(x)) \cdot |\det dT(x)|$ ist auf U integrierbar; b) es gilt

$$\int_U g(x)\,dx \; = \; \int_V f(y)\,dy\;. \qquad (*)$$

Sei $S = T^{-1} : V \to U$ die Umkehrfunktion von T.

Für a) bemerkt man zunächst, dass $f(T(x)) = \chi_{S(I)}(x)$. Da I abgeschlossen ist (also auch kompakt), ist $S(I)$ kompakt, und somit Borel, und somit messbar. Ferner ist $|\det dT(x)|$ stetig, also messbar, und somit ist g als Produkt messbarer Funktionen ebenfalls messbar. Dass g auf U integrierbar ist folgt aus b).

Für b) schreiben wir zunächst die Gleichung $(*)$ um als

$$\int_{S(I)} |\det dT(x)|\, dx \;=\; \lambda(I) \;.$$

Die Funktion $|\det dS|^{-1} : I \to \mathbb{R}$ ist stetig, und – da I kompakt ist – sogar gleichmäßig stetig auf I (Satz 5.3.12 aus Analysis 1).

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein $\delta > 0$, sodass für alle $y, y' \in I$ gilt:

$$|y - y'| < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|\, |\det dS(y)|^{-1} - |\det dS(y')|^{-1} \Big| \;<\; \varepsilon \;.$$

Zerlege I in endlich viele abgeschlossene Intervalle $I_1, \ldots, I_N$ von Durchmesser $< \delta$, die sich nur in Nullmengen schneiden. Setze $K_i = S(I_i)$. Dann gilt für alle $x, x' \in K_i$, dass $T(x), T(x') \in I_i$, also $|T(x) - T(x')| < \delta$ und somit

$$\begin{aligned} &\Big|\, |\det dS(T(x))|^{-1} - |\det dS(T(x'))|^{-1} \Big| \\ &= \Big|\, |\det dT(x)| - |\det dT(x')| \Big| \;<\; \varepsilon \;. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\underbrace{\max_{x \in K_i} |\det dT(x)|}_{=:\, M_i} \;-\; \underbrace{\min_{x \in K_i} |\det dT(x)|}_{=:\, m_i} \;\leq\; \varepsilon \;.$$

Wegen $m_i \leq |\det dT(x)| \leq M_i$ gilt

$$m_i\, \lambda(K_i) \;\leq\; \int_{K_i} |\det dT(x)|\, dx \;\leq\; M_i\, \lambda(K_i) \;,$$

und aus Beh. 2 wissen wir

$$m_i\, \lambda(K_i) \;\leq\; \lambda(I_i) \;\leq\; M_i\, \lambda(K_i) \;.$$

Mit $M_i - m_i \leq \varepsilon$ ergibt sich insgesamt, dass

$$\Big| \int_{K_i} |\det dT(x)|\, dx \;-\; \lambda(I_i) \Big| \;\leq\; \lambda(K_i)\, \varepsilon \;.$$

Die verschiedenen I_i (und somit auch die verschiedenen K_i) schneiden sich nur in Nullmengen. Daher erhalten wir die Summenzerlegung

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{S(I)} |\det dT(x)|\,dx \;-\; \lambda(I) \Big| \\
&= \Big| \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_{K_i} |\det dT(x)|\,dx \;-\; \lambda(I_i) \Big) \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{K_i} |\det dT(x)|\,dx \;-\; \lambda(I_i) \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \lambda(K_i)\varepsilon \;=\; \lambda(S(I))\varepsilon \;.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war (und $\lambda(S(I)) < \infty$), folgt die Behauptung. ⌋

Wir kommen nun zum allgemeinen Fall. Sei $f : V \to \mathbb{R}$ (der Fall $\mathbb{C}$ folgt dann) auf V integrierbar.

Beh. 4: Es gibt eine Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$ mit

- $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset V$,
- $\|f - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, und
- $\psi_k(y) \xrightarrow{k\to\infty} f(y)$ auf $V \setminus N$ für eine Nullmenge N.

⌈ Wir erweitern f auf ganz $\mathbb{R}^d$, indem wir f durch 0 fortsetzen:

$$f_V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad , \quad f_V(y) = \begin{cases} f(y) & ; y \in V \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases} \qquad .$$

Dann gilt $f_V \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Nach Lemma 12.2.7 gibt es eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\|f_V - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Allerdings gilt nicht unbedingt, dass $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset V$.

Sei $M_k \geq 0$ so gewählt, dass $\varphi_k \leq M_k$ auf $\mathbb{R}^d$. Sei W das Innere von $\operatorname{supp}(\varphi_k) \cap V$ und sei $E_k \subset W$ eine abgeschlossene Elementarmenge mit

$$\lambda(W \setminus E_k) \;\leq\; \frac{1}{k\,M_k} \;.$$

(Warum gibt es so ein E_k? *Hinweis:* Für eine offene Elementarmenge E_k siehe [Z2A5] und Satz 11.1.8. Wähle eine Zerlegung in disjunkte Intervalle (Lemma 11.2.6), mache diese gegebenenfalls etwas kleiner, nehme den Abschluss.) Da $\operatorname{supp}(\varphi_k) \setminus \operatorname{supp}(\varphi_k)^\circ$ eine Nullmenge ist (Warum?), gilt dann auch ?

?

$$\lambda((\operatorname{supp}(\varphi_k) \cap V) \setminus E_k) \;\leq\; \frac{1}{k\, M_k} \;.$$

Setze $\psi_k = \varphi_k \cdot \chi_{E_k}$. Dann

$$\|\varphi_k \cdot \chi_V - \psi_k\|_1 \leq M_k\, \lambda((\operatorname{supp}(\varphi_k) \cap V) \setminus E_k) = \frac{1}{k} \;.$$

und

$$\|f_V - \psi_k\|_1 \;\leq\; \underbrace{\|f_V - \varphi_k \chi_V\|_1}_{\leq \|f_V - \varphi_k\|_1} + \underbrace{\|\varphi_k \chi_V - \psi_k\|_1}_{\leq 1/k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \;.$$

Nach Lemma 12.2.8 können wir zu einer Teilfolge übergehen, sodass auch $\psi_k(y) \xrightarrow{k\to\infty} f_V(y)$ fast überall. ⌋

Mit der Notation aus Beh. 4 setze, für $x \in U$.

$$\tilde{\psi}_k(x) = \psi_k(T(x)) \cdot |\det dT(x)| \quad , \quad \tilde{f}(x) = f(T(x)) \cdot |\det dT(x)| \;.$$

Nach Lemma 12.3.5 ist $\tilde{N} := T^{-1}(N)$ ebenfalls eine Nullmenge, und auf $U \setminus \tilde{N}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\psi}(x) \;=\; \tilde{f}(x) \;.$$

Also $\tilde{\psi}_k \to \tilde{f}$ fast überall auf U. Nach Beh. 3 ist $\tilde{\psi}_k$ integrierbar auf U, und es gilt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\psi}_m - \tilde{\psi}_n\|_1 \;&=\; \int_U \big|\psi_m(T(x)) - \psi_n(T(x))\big|\, |\det dT(x)| dx \\
&\overset{\text{Beh. 3}}{=} \int_V \big|\psi_m(y) - \psi_n(y)\big| dy \;=\; \|\psi_m - \psi_n\|_1
\end{aligned}$$

Da die $\underline{\psi_m}$ in L^1 konvergieren, bilden die $\underline{\tilde{\psi}_m}$ eine Cauchy-Folge in L^1. Nach dem Satz von Fischer-Riesz (Satz 11.7.8) konvergiert somit auch die Folge $\underline{\tilde{\psi}_m}$ gegen eine (Äquivalenzklasse einer) Grenzfunktion $\underline{g}$ in L^1. Nach Lemma 12.2.8 konvergiert eine Teilfolge von $\tilde{\psi}_m$ dann fast überall gegen g. Aber $\tilde{\psi}_m$ konvergiert fast überall gegen $\tilde{f}$. Somit ist $\tilde{f} = g$ fast überall. Also ist $\tilde{f}$ integrierbar und

$$\int_U \tilde{f}(x)\, dx \;\overset{(*)}{=}\; \lim_{k\to\infty} \int_U \tilde{\psi}_k(x)\, dx \overset{\text{Beh. 3}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_V \psi_k(y)\, dy \;\overset{(*)}{=}\; \int_V f(y)\, dy \;,$$

wobei wir in $(*)$ benutzen, dass $|\int f - \int g| \leq \int |f-g| = \|f-g\|_1$ gilt. □

[Ende des nicht klausur-relevanten Teil des Beweises des Transformationssatzes.]

Korollar 12.3.7. Sei $T : U \to V$ wie in Satz 12.3.1. Sei $f : V \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ messbar. Dann ist auch $f \circ T \cdot |\det dT|$ messbar, und es gilt

$$\int_U f(T(x))\,|\det dT(x)|\,dx \;=\; \int_V f(y)\,dy \quad \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}\ .$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ und $y \in V$ definiere $f_k : V \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(y) \;=\; \begin{cases} 0 & ; |y| > k \\ f(x) & ; |y| \leq k \text{ und } f(y) \leq k \\ k & ; |y| \leq k \text{ und } f(y) > k \end{cases} \qquad .$$

Dann $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$, und $\lim_{k\to\infty} f_k(y) = f(y) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ für alle $y \in V$.

Ferner ist f_k messbar und über U integrierbar (Warum?). Setze $\tilde{f}_k(x) = f_k(T(x))\,|\det dT(x)|$. Nach dem Transformationssatz (Satz 12.3.1) ist $\tilde{f}_k$ auf U integrierbar und ?

$$\int_U \tilde{f}_k(x)\,dx \;=\; \int_V f_k(y)\,dy\ .$$

Da ebenfalls $\tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2 \leq \tilde{f}_3 \leq \dots$ und $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k(x) = f(T(x))\,|\det dT(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, können wir den Satz über monotone Konvergenz (Satz 11.5.1) auf beide Seiten anwenden und erhalten die gewünschte Aussage. $\square$

13 Integration über Untermannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel betrachten wir n-dimensionale Untermannigfaltigkeitem im $\mathbb{R}^d$ mit $0 \leq n \leq d$.

13.1 Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^d$

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 3.5 aus Königsberger 2].)

Um zu betonen, dass wir $\mathbb{R}^n$ als einen bestimmten Unterraum des $\mathbb{R}^d$ auffassen, schreiben wir

$$\mathbb{R}_0^n \;:=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x_{n+1} = \cdots = x_d = 0 \right\} .$$

Definition 13.1.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ nicht leer.

(i) M heißt *n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit (der Klasse $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$)* falls gilt: Für alle $a \in M$ gibt es $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $a \in U$ und eine Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ der Klasse $\mathcal{C}^p$, sodass

$$\varphi(M \cap U) \;=\; \mathbb{R}_0^n \cap V \;.$$

Die Abbildung φ heißt *Karte für M*, und $M \cap U$ heißt *Kartengebiet von φ*.

(ii) Eine Menge $\{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ von Karten für M mit $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ heißt *Atlas für M*.

Bemerkung 13.1.2. (1) Wir sagen auch $\mathcal{C}^p$-Untermannigfaltigkeit statt „differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^p$“. „Untermannigfaltigkeit“ ohne weitere Spezifikation heißt im folgenden $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit.

(2) Ein Atlas existiert per Definition, ist aber nicht eindeutig.

Die Vereinigung von einem Atlas für M mit beliebig vielen Karten für M ist wieder ein Atlas für M (Warum). Wenn man die Menge aller Karten für M betrachtet, erhält man den *maximalen Atlas* für M. Dieser ist eindeutig. ?

(3) Beh.: Die Zahl n aus Def. 13.1.1 (i) ist eindeutig bestimmt.

⌈ Sei φ wie in der Definition. Angenommen, es gibt $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $a \in \tilde{U}$ und eine Diffeomorphismus $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ (der Klasse $\mathcal{C}^1$) mit $\tilde{\varphi}(M \cup \tilde{U}) = \mathbb{R}_0^m \cap \tilde{V}$. Indem wir zur

Schnittmenge übergehen, können wir ObdA annehmen, dass $\tilde{U} = U$. Dann ist

$$\Phi \;:=\; \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \;:\; V \to \tilde{V}$$

ein Diffeomorphismus, der $V \cap \mathbb{R}^n_0$ auf $\tilde{V} \cap \mathbb{R}^m_0$ abbildet. Daher ergibt die Einschränkung von $d\Phi(\varphi(a))$ eine invertierbare lineare Abbildung $\mathbb{R}^n_0 \to \mathbb{R}^m_0$ (Warum?). Das geht aber nur für $m = n$. ⌋ ?

Nebenbemerkung zur Information: Teil (3) von Bemerkung 13.1.2 klingt offensichtlich. Wenn wir statt $\mathcal{C}^1$ Abbildungen nur stetige Abbildungen betrachten, so gibt es aber Beispiele von surjektiven stetigen Abbildungn $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Z.B. die Hilbert-Kurve (→wikipedia) (Warum ist die Grenzkurve stetig und surjektiv? *Hinweis:* Satz 8.2.3 (Cauchy für gleichmäßige Konvergenz), Satz 8.2.7 (Grenzfunktion ist stetig), Satz 5.3.1 (Bilder kompakter Räume sind kompakt)). Solche Dimensionsänderungen nach oben sind mit $\mathcal{C}^1$-Abbildungen nicht möglich, wie am am Rang der Ableitung erkennt. ?

Nebenbei: Keine stetige surjektive Abbildung $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ ist stetig umkehrbar, denn $[0,1]$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten, wenn man einen Punkt im Inneren weglässt, $[0,1] \times [0,1]$ aber nicht, also sind die Räume nicht homöomorph.

Beispiel 13.1.3. (Graphen von Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \neq \emptyset$, und $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Der Graph von f ist definiert als

$$\Gamma(f) \;:=\; \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \,\middle|\, x \in \Omega \text{ und } y = f(x) \right\} .$$

Beh.: $M = \Gamma(f)$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^d$ mit $d = n + k$.

⌈ Sei $a = (x,y) \in M$ beliebig. Dann $x \in \Omega$ und $y = f(x)$. Wähle $U = V = \Omega \times \mathbb{R}^k$ und

$$\varphi : U \to V \quad , \quad (x,y) \mapsto (x, y - f(x)) \ .$$

Wir müssen zeigen, dass φ eine Karte für M ist.

φ ist ein Diffeomorphismus: Betrachte $\psi : V \to U$, $(x,y) \mapsto (x, y + f(x))$. Dann ist ψ invers zu φ. Sowohl φ also auch ψ sind $\mathcal{C}^1$.

Es gilt $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^n_0 \cap V$: klar. (Warum? *Hinweis:* Zeigen Sie beide Mengeninklusionen.) ⌋ ?

Eine wichtige Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten ist als Nullstellenmenge geeigneter Funktionen:

Satz 13.1.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^d$, $M \neq \emptyset$. Es sind äquivalent:

(i) M ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(ii) Für alle $a \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$, $a \in U$ und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{d-n}$, sodass $df(a) \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d-n})$ surjektiv ist (d.h. vollen Rang hat), und

$$M \cap U \;=\; f^{-1}\big(\{0\}\big) \;.$$

Beweis. (i)⇒(ii): Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte von M um den Punkt a. Per Definition ist φ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^n_0 \cap V$. Seien $\varphi_i : U \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von φ. Wähle f als die letzten $d-n$ Komponenten:

$$f : U \to \mathbb{R}^{d-n} \quad , \quad x \mapsto \big(\varphi_{n+1}(x)\,, \ldots ,\, \varphi_d(x)\big) \;.$$

Dann hat f die in (ii) geforderten Eigenschaften. (Warum? *Hinweis:* $d\varphi(a)$ ist invertierbar. Wie setzt sich die Matrix $df(a)$ zusammen?) ?

(ii)⇒(i): Sei $a \in M$ beliebig. Wir konstruieren eine Karte φ von M um a mit Hilfe des Satzes über lokale Umkehrbarkeit (Satz 9.4.4).

Sei $f : U \to \mathbb{R}^{d-n}$ wie in (ii). Da die $(d-n) \times d$ Matrix $[df(a)]$ vollen Rang hat, gibt es Zeilenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, sodass die $d \times d$ Matrix

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -v_n- \\ \hline [df(a)] \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Betrachte Linearformen $\lambda_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x, v_i)$, wobei $(-,-)$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Definiere

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^d \quad , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \\ f_1(x) \\ \vdots \\ f_{d-n}(x) \end{pmatrix}$$

Dann ist φ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung mit $[d\varphi(a)] = A$ (Warum?). Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit gibt es eine offene Umgebung $U' \subset U$, $a \in U'$ und $V \subset \mathbb{R}^d$, sodass die Einschränkung $\varphi|_{U'} : U' \to V$ ein Diffeomorphismus ist. ?

Nach Voraussetzung gilt für alle $x \in U$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in M$. Für alle $x \in U'$ gilt also auch: $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n_0 \Leftrightarrow x \in M$. Da $\varphi(U') = V$ haben wir insgesamt, dass

$$\varphi(M \cap U') \ = \ \mathbb{R}^n_0 \cap V \ .$$

□

Definition 13.1.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion.

(i) $a \in U$ heißt *regulärer Punkt*, falls $df(a) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ surjektiv ist.

(ii) $b \in \mathbb{R}^k$ heißt *regulärer Wert*, falls jedes $a \in U$ mit $f(a) = b$ ein regulärer Punkt ist.
(Insbesondere ist jedes b mit leerem Urbild ein regulärer Wert.)

Satz 13.1.6. (Satz vom regulären Wert)
Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Sei $b \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert von f, sodass $M := f^{-1}(\{b\})$ nicht leer ist. Dann ist M eine $(d-k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Dies ist ein direktes Korollar zur lokalen Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten also Lösungsmengen in Satz 13.1.4: Da b ein regulärer Wert ist, ist jedes $a \in M$ ein regulärer Punkt. Mit $n = d - k$ hat $f - b : U \to \mathbb{R}^{d-n}$ die Eigenschaften in Satz 13.1.4 (ii). □

Beispiel 13.1.7. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Wir wollen prüfen, welche $b \in \mathbb{R}$ reguläre Werte für f sind. Nach Satz 13.1.6 sind dann die Lösungsmengen $M_b = f^{-1}(\{b\})$ Untermannigfaltigkeiten (M_b ist in diesem Beispiel nie leer).

Beh.: b ist genau dann ein regulärer Wert, falls es ungleich Null ist.

⌈ Wir berechnen zunächste die Ableitung von f:

$$[df(x,y)] \ = \ \begin{pmatrix} 2x & -2y \end{pmatrix} \ .$$

Somit ist $df(x,y)$ genau dann surjektiv, falls $(x,y) \neq (0,0)$. Für $(x,y) = (0,0)$ gilt aber $f(x,y) = 0$. Somit ist $b = 0$ der einzige nicht-reguläre Wert von b. ⌋

(Können Sie eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ finden, sodass für die Einschränkung $f : U \to \mathbb{R}$ sogar jedes $b \in \mathbb{R}$ regulär ist? Was ist das maximale solche U?) ?

13.2 Reguläre Parameterdarstellungen

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 11.1 aus Königsberger 2].)

Definition 13.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt *Immersion* (oder *reguläre Parameterdarstellung*), falls $d\gamma(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ für alle $a \in \Omega$ injektiv ist (also insbesondere $n \leq d$). Das Bild $\gamma(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$ heißt *Spur von* γ.

Beispiel 13.2.2.

(1) Graphen von Funktionen (Beispiel 13.1.3): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Setze $d = n + k$ und

$$\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d \quad , \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_k(x)) \ .$$

Dann ist γ eine Immersion (Warum?) und die Spur von γ ist gerade der Graph von f, d.h. $\gamma(\Omega) = \Gamma(f)$. ?

(2) Kurven (vergleiche Satz 7.6.9): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine *reguläre Kurve* ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ sodass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann ist γ eine Immersion.

(3) Rotationsflächen: Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad t \mapsto (r(t), z(t))$$

eine reguläre Kurve mit $r(t) > 0$ für alle $t \in I$. Setze

$$\gamma : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad (\varphi, t) \mapsto \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix} \quad .$$

Dann ist γ eine Immersion. Denn: $\mathcal{C}^1$ ist klar. Um Injektivität von $d\gamma(a)$ zu prüfen, kann man γ als Verkettung $\gamma = g \circ f$ schreiben, mit

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 && (\varphi, t) \mapsto (\varphi, \alpha(t)) \ , \\ &g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 && (\varphi, r, z) \mapsto (T(r, \varphi), z) \ , \end{aligned}$$

wobei T der Polarkoordinaten-Diffeomorphismus aus Beispiel 12.3.3 (1) ist. Dann sind $df(\varphi, t)$ und $dg(\varphi, r, z)$, $r > 0$, injektiv. (Warum?) ?

Definition 13.2.3. Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, offen. Zwei Immersionen $\gamma_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^d$ heißen *äquivalent*, falls es einen Diffeomorphismus $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ gibt mit $\gamma_1 = \gamma_2 \circ T$.

(Äquivalente Immersionen haben die gleiche Spur. Warum? Immersionen mit gleicher Spur sind nicht unbedingt äquivalent. Fällt Ihnen ein Beispiel ein?) ?

Lemma 13.2.4. (Lokale Normalform)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Immersion und $a \in \Omega$. Es gibt $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ offen mit $a \in \tilde{\Omega}$, sodass für die Einschränkung $\tilde{\gamma} := \gamma|_{\tilde{\Omega}}$ gilt:

(i) Die Spur von $\tilde{\gamma}$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(ii) Es gibt $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Immersion $\delta : \Lambda \to \mathbb{R}^d$ der Form

$$\delta(x) \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n, \delta_{n+1}(x), \ldots, \delta_d(x)) \; ,$$

und eine Koordinaten-Permutation $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, sodass $\tilde{\gamma}$ und $P \circ \delta$ äquivalent sind.

Der Beweis kommt nach dem nächsten Beispiel.

Beispiel 13.2.5.

(1) Die Spur einer Immersion muss keine Untermannigfaltigkeit sein: Betrachte

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t) \; .$$

Die Spur von γ sieht aus wie „∞“. Im Punkt 0 gibt es keine Karte, also ist dies keine Untermannigfaltigkeit.

Sei $\tilde{\Omega} = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. Die Spur der die Einschränkung $\tilde{\gamma} := \gamma|_{\tilde{\Omega}}$ ist eine Untermannigfaltigkeit. Insbesondere gibt es jetzt eine Karte um 0. Das folgt aus Lemma 13.2.4 und der folgenden lokalen Normalform:

Sei $\Lambda = (-\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4})$ und $\delta : \Lambda \to \mathbb{R}^2$,

$$\delta(x) = (x, \sin(2\arccos(x))) \; .$$

Die Abbildung $T : \tilde{\Omega} \to \Lambda$, $T(t) = \cos(t)$ ist ein Diffeomorphismus (Warum?), und es gilt $\tilde{\gamma} = \delta \circ T$. ?

(2) Die Spur einer Immersion muss nicht injektiv sein, um eine Untermannigfaltigkeit zu sein: Betrachte

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \; .$$

Die Spur von γ ist der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$, und dies ist eine Untermannigfaltigkeit.

Um $a = (0,1)$ hat man die lokale Normalform $\delta(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$. Um $a = (1,0)$ braucht man die Permutation P. Dort ist auch $\delta(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ und $P(x,y) = (y,x)$, sodass $P \circ \delta(x) = (\sqrt{1-x^2}, x)$.

(3) Die Spur einer injektiven Immersion muss keine Untermannigfaltigkeit sein: Betrachte dazu das Beispiel aus Teil 1, aber eingeschränkt auf $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$. Dann sieht es bei 0 aus wie eine „T-Kreuzung“, und es gibt keine Karte um 0.

Beweis von Lemma 13.2.4.

(ii) Per Annahme ist $d\gamma(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ injektiv. Also gibt es eine Koordinaten-Permutation $Q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, sodass in der $d \times n$-Matrix $[Q \circ d\gamma(a)]$ die ersten n Zeilen eine invertierbare $n \times n$-Matrix bilden (Warum?). Setze ?

$$T : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , \quad T(x) = \big((Q \circ \gamma)_1(x), \dots, (Q \circ \gamma)_n(x)\big) \ .$$

Per Konstruktion ist $dT(a) \in GL_n$. Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit gibt es offene Mengen $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $a \in \tilde{\Omega}$, und Λ, sodass die Einschränkung $T : \tilde{\Omega} \to \Lambda$ ein Diffeomorphismus ist. Definiere

$$\delta : \Lambda \to \mathbb{R}^d \quad , \quad \delta(y) = Q \circ \gamma \circ T^{-1}(y) \ .$$

Dann ist δ eine Immersion, die äquivalent zu $Q \circ \gamma$ ist (Warum?). Ferner gilt für $i = 1, \dots, n$, dass $(Q \circ \gamma)_i(T^{-1}(y)) = y_i$, also hat δ die in (ii) geforderte Form. Mit $P = Q^{-1}$ folgt (ii). ?

(i) Folgt sofort aus (ii) und Beispiel 13.1.3. (Wie?) ?

□

■ Seien X, Y metrische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. f ist ein *Homöomorphismus* (oder: *f bildet X homöomorph auf Y ab*), falls f bijektiv ist und f^{-1} stetig ist.
■ Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $M \subset X$ ebenfalls ein metrischer Raum mit der *induzierten Metrik* $d\big|_{M \times M}$. Eine Teilmenge $V \subset M$ ist genau dann offen in M, wenn es eine in X offene Menge U gibt mit $V = M \cap U$.

Beispiel 13.2.6. Eine injektive stetige Abbildung ist immer eine Bijektion auf ihr Bild, aber nicht unbeding ein Homöomorphismus: Betrachte die Immersion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$ aus Beispiel 13.2.5.

Setze $I = (0, \pi)$, $J = (-\frac{\pi}{2}, \pi)$ und $\gamma_I = \gamma|_I : I \to \mathbb{R}^2$, und genauso für γ_J. Dann gilt:

- γ_I und γ_J sind stetig und injektiv. Somit ist $\gamma_I : I \to \gamma_I(I)$ stetig und bijektiv, und genauso für γ_J.

- γ_I ist ein Homöomorphismus. (Warum? *Hinweis:* γ ist auch auf dem kompakten Intervall $[0, \pi]$ stetig und injektiv. Insbesondere ist auch das Bild $\gamma([0, \pi])$ kompakt. Erinnern Sie sich an Satz 5.3.7.) ?

- γ_J ist *kein* Homöomorphismus. (Warum? *Hinweis:* Betrachten Sie eine offene Umgebung U um 0 (in $\mathbb{R}^2$). Dann enthält $\gamma^{-1}(U)$ eine Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ und von $-\frac{\pi}{2}$ (jeweils in J). Warum ist das ein Problem?) ?

Definition 13.2.7. Eine Immersion $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt *Einbettung*, falls $\gamma : \Omega \to \gamma(\Omega)$ ein Homöomorphismus ist.

Satz 13.2.8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, und sei $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Einbettung. Dann ist die Spur von γ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Setze $M := \gamma(\Omega)$. Dann ist $\gamma : \Omega \to M$ ein Homöomorphismus. Sei $m \in M$ beliebig. Wir zeigen, dass es eine Karte φ von M und m gibt.

Sei $a = \gamma^{-1}(m)$. Nach Lemma 13.2.4 (i) gibt es $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ offen mit $a \in \tilde{\Omega}$, sodass $\tilde{M} := \gamma(\tilde{\Omega})$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte für $\tilde{M}$ um m. D.h. $U, V \subset \mathbb{R}^d$ sind offen und φ ist ein Diffeomorphismus mit

$$\varphi(\tilde{M} \cap U) \;=\; \mathbb{R}^n_0 \cap V \ .$$

Im Allgemeinen ist φ *keine* Karte von M um m, da $M \cap U \supsetneq \tilde{M} \cap U$ gelten kann (Warum „$\supsetneq$“ und warum ist das ein Problem?). Dies korregieren wir wie folgt: Da $\gamma : \Omega \to M$ ein Homöomorphismus ist, ist $\tilde{M} = \gamma(\tilde{\Omega})$ offen in M. Somit gibt es eine in $\mathbb{R}^d$ offene Menge U', sodass $U' \cap M = \tilde{M}$. Die Einschränkung von φ auf $U \cap U'$ ist nun die gesuchte Karte um m. ? □

Satz 13.2.9. Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ offen und $\gamma_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^d$ Einbettungen. Falls γ_1 und γ_2 die gleiche Spur haben, so sind sie äquivalent.

Beweis. Sei $M := \gamma_1(\Omega_1) = \gamma_2(\Omega_2)$. Per Annahme sind $\gamma_i : \Omega_i \to M$, $i = 1, 2$, Homöomorphismen. Also ist auch $T : \Omega_1 \to \Omega_2$, $T := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ ein Homöomorphismus.

Beh.: T ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung.

Sei $a_1 \in \Omega_1$ beliebig. Setze $a_2 := T(a_1)$. Nach Lemma 13.2.4 (ii) gibt es $\tilde{\Omega}_2 \subset \Omega_2$ offen mit $a_2 \in \tilde{\Omega}_2$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Immersion $\delta : \Lambda \to \mathbb{R}^d$ der Form

$$\delta(x) \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n, \delta_{n+1}(x), \ldots, \delta_d(x)) \ ,$$

und eine Koordinaten-Permutation $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, sodass $\gamma_2|_{\tilde{\Omega}_2} = P \circ \delta \circ S$ für einen geeigneten Diffeomorphismus $S : \tilde{\Omega}_2 \to \Lambda$.

Sei $\mathrm{pr}_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten. Dann gilt auf Λ, dass $\mathrm{pr}_n \circ \delta = \mathrm{id}$. Damit erhalten wir

$$\big(\gamma_2|_{\tilde{\Omega}_2}\big)^{-1} \;=\; S^{-1} \circ \mathrm{pr}_n \circ P^{-1} \;.$$

Setze $\tilde{\Omega}_1 := \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2(\tilde{\Omega}_2)$. Dann

$$T|_{\tilde{\Omega}_1} \;=\; S^{-1} \circ \mathrm{pr}_n \circ P^{-1} \circ \gamma_1 \;,$$

und alle diese Abbildungen sind $\mathcal{C}^1$. Also ist T in einer Umgebung von a_1 stetig differenzierbar. Da $a_1 \in \Omega_1$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\rfloor$

Wenn man die Rollen von γ_1 und γ_2 vertauscht, ergibt die obige Behauptung, dass T sogar ein Diffeomorphismus ist. Per Konstruktion gilt $\gamma_1 = \gamma_2 \circ T$, und somit sind γ_1 und γ_2 äquivalent. $\square$

13.3 Volumen von n-Spaten

Für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ $(n \leq d)$ heißt

$$P(a_1, \ldots, a_n) \;=\; \Big\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i \,\Big|\, t_i \in [0,1] \Big\} \;\subset\; \mathbb{R}^d$$

der von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannte *n-Spat* oder *Parallelotop*.

Wir wollen ein „Volumen“ v für $P(a_1, \ldots, a_n)$ definieren. Wir können nicht direkt das Lebesgue-Maß nehmen, da für $n < d$ gilt $\lambda(P(a_1, \ldots, a_n)) = 0$ (Warum?). Wir geben zwei Charakterisierungen (A und B unten) für v an und zeigen dann, dass beide die gleiche, eindeutige, Funktion v_n beschreiben. ?

A) Sei $\mathrm{pr}_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten.

(A1) Falls $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n_0$, so ist v durch das n-dimensionale Lebesgue-Maß gegeben,

$$v(a_1, \ldots, a_n) = \lambda_n\big(\,\mathrm{pr}_n(P(a_1, \ldots, a_n))\,\big) \;.$$

(A2) Für alle $T \in O(d)$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ haben $P(a_1, \ldots, a_n)$ und $T(P(a_1, \ldots, a_n)) = P(Ta_1, \ldots, Ta_n)$ das gleiche n-Volumen:

$$v(a_1, \ldots, a_n) \;=\; v(Ta_1, \ldots, Ta_n) \;.$$

B) Für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion v die folgenden Identitäten:

(B1) $v(a_1, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_n) \;=\; |\lambda|\, v(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$.

(B2) Für $i \neq j$ gilt $v(a_1, \ldots, a_i + a_j, \ldots, a_n) \;=\; v(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$, wobei auf der linken Seite im i-ten Argument $a_i + a_j$ statt a_i steht.

(B3) $v(a_1, \ldots, a_n) = 1$, falls $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathbb{R}^d$ orthonormal sind, also falls $(a_i, a_j) = \delta_{i,j}$.

Wir definieren nun eine Funktion $v_n : (\mathbb{R}^d)^{\times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und zeigen dann, dass diese die eindeutige Lösung zu A und zu B ist. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$. Betrachte die $d \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad .$$

Die Komposition $A^t A$ ist eine symmetrische $n \times n$ Matrix mit Einträgen, die durch das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$ gegeben sind (Warum?) ?

$$(A^t A)_{ij} \;=\; (a_i, a_j) \;.$$

Die Determinante von $A^t A$ ist nicht-negativ (Warum? *Hinweis:* Warum ist $(x, A^t A x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$? Und was sagt dies über die Eigenwerte von $A^t A$?), und wir können definieren ?

$$v_n(a_1, \ldots, a_n) \;:=\; \sqrt{\det(A^t A)} \;\in\; \mathbb{R}_{\geq 0} \;.$$

Beispiel 13.3.1. Sei $n = 2$ und $d = 3$. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Dann z.B. $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, und es gilt

$$A^t A = \begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{pmatrix} \quad , \quad \det(A^t A) = (a,a) \cdot (b,b) - (a,b)^2 \;.$$

Wir können dies mit dem Betrag des Kreuzproduktes von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ vergleichen:

$$a \times b \;=\; \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Mit etwas Geduld rechnet man nach, dass

$$v_3(a, b) \;=\; \sqrt{\det(A^t A)} \;=\; |a \times b| \;.$$

Dies passt zu der Interpretation, dass der Betrag des Kreuzproduktes die Fläche des aufgespannten Parallelogramms berechnet.

Satz 13.3.2. Falls v die Eigenschaften in A (bzw. in B) erfüllt, so gilt $v = v_n$.

Beweis.
Beh.: v_n erfüllt (A1) und (A2).

⌈ Wir beginnen mit (A1). Sei also $a_i \in \mathbb{R}^n_0$, $i = 1, \dots, n$. Setze $b_i = \mathrm{pr}_n(a_i)$. Dann

$$\mathrm{pr}_n(P(a_1, \dots, a_n)) = P(b_1, \dots, b_n) \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Schreibe

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad .$$

Dann $A^t A = B^t B$, und da B eine $n \times n$-Matrix ist, gilt weiterhin

$$\det(A^t A) \ = \ \det(B^t B) \ = \ \det(B^t) \det(B) \ = \ \det(B)^2 \ ,$$

also $\sqrt{\det(A^t A)} = |\det B|$. Eigenschaft (A1) ist jetzt die Aussage von Lemma 12.3.4 (Warum?). Für (A2) benutzt man, dass für $T \in O(d)$ per Defintion gilt, dass $T^t T = \mathrm{id}$. Damit rechnet man ?

$$(TA)^t (TA) = A^t T^t T A = A^t A \ .$$ ⌋

Beh.: Falls v (A1) und (A2) erfüllt, so gilt $v = v_n$.

(→Übung [Z9A2])

Beh.: v_n erfüllt (B1)–(B3).

⌈ (B3) ist klar. Für (B2) bemerkt man

$$\tilde{A} \ := \ \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \cdots & a_i + a_j & \cdots & a_n \\ | & & | & & | \end{pmatrix} \ = \ A\,(\mathrm{id} + E_{ji}) \ ,$$

wobei id die $n \times n$ Einheitsmatrix ist, und E_{ji} die $n \times n$ Matrix mit einer 1 an der Stelle (j, i) und Null sonst. Falls e_i den i-ten Einheitsvektor bezeichnet, dann gilt z.B. $A(\mathrm{id} + E_{ji}) e_i = A(e_i + e_j) = a_i + a_j$. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}^t \tilde{A}) \ &= \ \det((\mathrm{id} + E_{ij}) A^t A (\mathrm{id} + E_{ji}) \\ &= \ \underbrace{\det(\mathrm{id} + E_{ij})}_{= 1} \ \det(A^t A) \ \underbrace{\det(\mathrm{id} + E_{ji})}_{= 1} \ . \end{aligned}$$

Eigenschaft (B1) sieht man so ähnlich. (Wie?) ⌋ ?

Beh.: Falls v (B1)–(B3) erfüllt, so gilt $v = v_n$.

(→Übung [Z9A2]) □

13.4 Integration über ein Kartengebiet

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 11.3 aus Königsberger 2].)

In diesem Kapitel bezeichnet $M \subset \mathbb{R}^d$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Lemma 13.4.1. Jedes Kartengebiet von M ist Spur einer Einbettung.

Beweis. Sei $W \subset M$ ein Kartengebiet. Nach Definition 13.1.1 bedeutet dies, dass es $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen gibt, und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$, sodass gilt: $M \cap U = W$ und $\varphi(W) = \mathbb{R}^n_0 \cap V$.

Sei $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ die Einbettung $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, und $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ entsprechend die Projektion auf die ersten n Koordianten. Dann $i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n_0$. Setze

$$\Omega := p(\mathbb{R}^n_0 \cap V) \quad , \quad \gamma := \varphi^{-1} \circ i : \Omega \to \mathbb{R}^d \ .$$

Beh.: γ ist eine Einbettung mit Spur W.

⌈ Dass $\gamma(\Omega) = W$ gilt per Konstruktion. Es bleibt, zu zeigen, dass γ eine Immersion ist, sowie ein Homöomorphismus $\Omega \to W$ ist.

Sei $a \in \Omega$ beliebig. Es gilt $d\gamma(a) = d\varphi^{-1}(\gamma(a)) \circ di(a)$, und $d\varphi^{-1}(\gamma(a))$ und $di(a)$ sind injektiv (Was ist die Matrixdarstellung von $di(a)$?). Somit auch $d\gamma(a)$. ?

Die inverse Abbildung zu $\gamma : \Omega \to W$ ist $p \circ \varphi|_W : W \to \Omega$ (Warum?), und diese ist stetig. ⌋ □ ?

Definition 13.4.2.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Für $a \in \Omega$ heißt $d\gamma(a)^t d\gamma(a)$ *Maßtensor von γ in a* und

$$g^\gamma(a) := \det\big(d\gamma(a)^t \, d\gamma(a)\big)$$

heißt *Gramsche Determinante von γ in a.*

(ii) Sei $W \subset M$ ein Kartengebiet, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Einbettung mit Spur W, und $f : W \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion. Dann

(a) heißt f *messbar*, bzw.

(b) *existiert das Integral* von f, bzw.

(c) heißt f *integrierbar*

bezüglich γ, falls
$$f \circ \gamma \cdot \sqrt{g^\gamma}$$
bezüglich des Lebesgue-Maßes im $\mathbb{R}^n$

(a) messbar ist, bzw.

(b) auf Ω ein wohldefiniertes Integral besitzt (im Sinne von Definition 11.4.5), bzw.

(c) auf Ω integrierbar ist.

Falls (b) oder (c) gilt, so heißt
$$\int^\gamma f \;:=\; \int_\Omega f(\gamma(a))\sqrt{g^\gamma(a)}\,da$$
das *Integral von f bezüglich γ.*

Lemma 13.4.3. Sei $W \subset M$ ein Kartengebiet und $f : W \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$). Seien $\gamma_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$, Einbettungen mit Spur W. Dann erfüllt f die Eigenschaft (a), (b), oder (c) aus Definition 13.4.2 bezüglich γ_1 genau dann, wenn f sie bezüglich γ_2 erfüllt. Im Fall (b) oder (c) gilt
$$\int^{\gamma_1} f \;=\; \int^{\gamma_2} f\ .$$

Beweis. Nach Satz 13.2.9 gibt es einen Diffeomorphismus $T : \Omega_1 \to \Omega_2$, sodass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ T$. Alle Abbildungen sind $\mathcal{C}^1$, also gilt für alle $a \in \Omega_1$, dass
$$d\gamma_1(a) \;=\; d\gamma_2(T(a))\,dT(a)\ .$$
Daraus ergibt sich für die Gramsche Determinante:
$$\begin{aligned} g^{\gamma_1}(a) &= \det\big(d\gamma_1(a)^t\,d\gamma_1(a)\big) \\ &= \det\big(dT(a)^t\,d\gamma_2(T(a))^t\,d\gamma_2(T(a))\,dT(a)\big) \\ &= \det(dT(a)^t)\,\det\big(d\gamma_2(T(a))^t\,d\gamma_2(T(a))\big)\,\det(dT(a)) \\ &= \det(dT(a))^2\,g^{\gamma_2}(T(a)) \end{aligned}$$
Setze $h_i := f \circ \gamma_i \cdot \sqrt{g^{\gamma_i}}$. Mit der obigen Rechnung folgt
$$h_1(a) \;=\; h_2(T(a))\,\big|\det(dT(a))\big|$$
Die Aussage des Lemmas folgt nun aus dem Transformationssatz (Satz 12.3.1), aus Bemerkung 12.3.2 (2), und aus Korollar 12.3.7. Z.B. ist $h_2 : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) genau dann messbar, wenn $h_2 \circ T \cdot |\det dT|$ auf Ω_1 messbar ist, also wenn h_1 messbar ist. Daraus folgt die Aussage des Lemmas für Eigenschaft (a). Fälle (b) und (c) sieht man genauso. (Details?) □ ?

Definition 13.4.4. (Integration über ein Kartengebiet)
Sei $W \subset M$ ein Kartengebiet und $f : W \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$).

(i) f heißt *integrierbar auf* W, wenn es bezüglich einer Einbettung γ mit Spur W integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_W f\, dS \;:=\; \int^{\gamma} f$$

das *Integral von* f *über* W.

(ii) Das n-*dimensionale Volumen von* W ist definiert als

$$v_n(W) \;:=\; \int_W 1\, dS \;.$$

Bemerkung 13.4.5.

(1) Das „dS" in der Definition ist (zunächst) nur Notation, also $\int_{(-)}(-)dS$ ist als ein Symbol zu verstehen.

(2) Nach Lemma 13.4.3 ist f bezüglich allen Einbettungen mit Spur W integrierbar, wenn es es bezüglich einer ist, und das Integral von f über W ist von der Wahl der Einbettung γ unabhängig.

(3) Die Begriffe „*f ist auf W messbar*" und „*das Integral von $f : W \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert auf W*" werden über die Wahl einer Einbettung γ definiert und sind dann wegen Lemma 13.4.3 von der Wahl unabhängig.

Beispiel 13.4.6.

(1) Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ ($n \le d$) linear unabhängig, und $P(a_1, \ldots, a_n)$ der aufgespannte n-Spat wie in Kapitel 13.3. Sei W das Innere von $P(a_1, \ldots, a_n)$ (also die mit $t_i \in (0,1)$ statt $t_i \in [0,1]$ definierte Menge). Mit der Notation für das Spat-Volumen aus Kapitel 13.3 gilt dann

$$v_n(a_1, \ldots, a_n) \;=\; v_n(W) \;=\; \int_W 1\, dS \;.$$

($\to$Übung [Z10A2]). Wenn wir Nullmengen in Untermannigfaltigkeiten behandeln, werden wir sehen, dass $P(a_1, \ldots, a_n) \setminus W$ eine Nullmenge in der n-dimensionale Unterraum ist, die von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannt wird.

(2) Sei $n = 1$, also M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$, und sei $W \subset M$ ein Kartengebiet, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Einbettung mit Spur W, mit $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Der Maßtensor von γ in $a \in \Omega$ ist gegeben durch

$$g^\gamma(a) \;=\; (\gamma'(a), \gamma'(a)) \;=\; |\gamma'(a)|^2 \;.$$

(Warum? Wo ist $d\gamma(a)$? Wo ist die Determinante?) Für $f : W \to \mathbb{C}$ gilt ?

$$\int_W f\, dS \;=\; \int^\gamma f \;=\; \int_\Omega f(\gamma(a)) \sqrt{g^\gamma(a)} da \;=\; \int_\Omega \underbrace{f(\gamma(a))\, |\gamma'(a)|}_{=:\, h(a)} \, da \;.$$

wobei (per Definition) f auf W integrierbar ist, wenn der Integrand h auf der rechten Seite es ist. Entsprechend ist das 1-Volumen von W (also die Länge von W) gegeben durch

$$v_1(W) \;=\; \int_\Omega |\gamma'(a)|\, da \;.$$

Für W ein Intervall passt das zur Definition der Länge einer Kurve, siehe Definition 7.6.6 und Satz 7.6.9.

(3) Sei $n = 2$, $d = 3$ und $M = S^2_r$ eine 2-Späre mit Radius r,

$$S^2_r \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x| = r \right\} \;.$$

Betrachte die Menge

$$W \;=\; S^2_r \setminus \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \le 0,\ y = 0 \right\} \;.$$

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ (siehe [Z8A2]) geben einen Diffeomorphismus $P_3 : U_3 \to V_3$, wobei

$$U_3 = \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \;,\quad V_3 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \le 0,\ y = 0 \right\} \;.$$

Aus $P_3^{-1} : V_3 \to U_3$ kann man sich eine Karte basten (Wie? *Hinweis:* Es gilt $P_3^{-1}(S^2_r \cap V_3) = \{r\} \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Warum ist das noch keine Karte?). Da $W = S^2_r \cap V_3$, ist W somit ein Kartengebiet. Setze $\Omega = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und definiere $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^3$ als ?

$$\gamma(u, v) = P_3(r, u, v) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos v \cdot \cos u \\ \cos v \cdot \sin u \\ \sin v \end{pmatrix} \quad ,$$

(Warum ist das eine Einbettung?) Es gilt ?

$$[d\gamma(u,v)] = r \begin{pmatrix} -\cos v \cdot \sin u & -\sin v \cdot \cos u \\ \cos v \cdot \cos u & -\sin v \cdot \sin u \\ 0 & \cos v \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{pmatrix} =: X \quad ,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Spaltenvektoren sind (bis auf den Vorfaktor r). Damit berechnet man den Maßtensor als

$$X^t X = r^2 \begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{pmatrix} = r^2 \begin{pmatrix} (\cos v)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Gramsche Determinate als

$$g^\gamma(u,v) = r^4 (\cos v)^2 \ .$$

Per Definition ist eine Funktion $f : W \to \mathbb{C}$ genau dann über W integrierbar, wenn $f(\gamma(u,v))\, r^2 \cos v$ über Ω integrierbar ist, und es gilt

$$\int_W f \, dS = \int_\Omega f(\gamma(u,v))\, r^2 \cos v \, d(u,v) \ .$$

Das 2-Volumen von W, also der Flächeninhalt von W, ist

$$v_2(W) = \int_W 1 \, dS = \int_\Omega r^2 \cos v \, d(u,v) = 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv = 4\pi r^2 \ .$$

Lemma 13.4.7. Sei $W \subset M$ ein Kartengebiet.

(i) Eine auf W messbare Funktion $f : W \to \mathbb{C}$ ist genau dann auf W integrierbar, wenn $|f|$ es ist.

(ii) (monotone Konvergenz) Sind $f_i : W \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$ messbar auf W mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, so ist auch $f = \lim_{i\to\infty} f_i : W \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar auf W und

$$\int_W f \, dS = \lim_{i\to\infty} \int_W f_i \, dS \ .$$

(iii) (dominierte Konvergenz) Sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf W integrierbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare Funktion F mit $|f_i| \leq F$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar und

$$\int_W f \, dS = \lim_{i\to\infty} \int_W f_i \, dS \ .$$

Beweis. Wähle eine Einbettung $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit Spur W. Die Aussagen (i)–(iii) folgen aus den entsprechenden Aussagen für $h := f \circ \gamma \cdot \sqrt{g^\gamma}$ bezüglich des Lebesgue Maßes und Integrals. Und zwar: (i) Bemerkung 11.5.10 (1); (ii) Satz über monotone Konvergenz (Satz 11.5.1); (iii) Satz über dominierte Konvergenz (Satz 11.5.6).

Z.B. in (ii) setze $h_i = f_i \circ \gamma \cdot \sqrt{g^\gamma}$. Dann sind die h_i per Definition messbar, und sie erfüllen $0 \le h_1 \le h_2 \le \dots$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist auch $h = \lim_{i\to\infty} h_i : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, und es gilt

$$\int_\Omega h(a)\, da \;=\; \lim_{i\to\infty} \int_\Omega h_i(a)\, da \;.$$

Dies ist gerade die Behauptung in (ii). □

13.5 Zerlegung der Eins

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 11.4 aus Königsberger 2].)

Definition 13.5.1. Sei X ein metrischer Raum.

(i) Eine *(stetige, lokal endliche) Zerlegung der Eins auf* X ist eine Familie $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $\varepsilon_i : X \to [0, 1]$, sodass

  (a) $\{\varepsilon_i\}$ ist *lokal endlich*, d.h. für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung V_x von x, sodass $\varepsilon_i|_{V_x} = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$.

  (b) Für alle $x \in X$ gilt $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varepsilon_i(x) = 1$ (wegen (a) tragen nur endlich viele ε_i zu der Summe bei.)

(ii) Sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X. Eine Zerlegung der Eins $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ heißt *der Überdeckung* $\mathcal{O}$ *untergeordnet*, falls gilt:

$$\forall i \in \mathbb{N}\ \exists U \in \mathcal{O} \;:\; \operatorname{supp}(\varepsilon_i) \subset U \;,$$

wobei $\operatorname{supp}(\varepsilon_i)$ der Träger von ε_i ist, siehe Definition 12.3.6.

Nebenbemerkung zur Information: Man kann zeigen, dass es für jede offene Überdeckung eines metrischen Raumes eine untergeordnete Zerlegung der Eins gibt, siehe „parakompakter Raum“ (→wikipedia). Hier zeigen wir eine Version für Untermannigfaltigkeiten, die den Vorteil hat, dass wir sogar eine beliebig oft stetig differenzierbare Zerlegung der Eins bekommen. Das wird für den Satz von Stokes wichtig.

Satz 13.5.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit.

(i) Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{O}$ von M gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(ii) Die ε_i können so gewählt werden, dass $\operatorname{supp}(\varepsilon_i)$ kompakt ist, und dass $\varepsilon_i = \tilde{\varepsilon}_i|_M$, wobei $\tilde{\varepsilon}_i : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ jeweils $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger sind.

Beweis. Teil (i):

Beh. 1: Es gibt eine Familie von kompakten Mengen $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $K_i \subset M$, $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ (das Innere ist bezüglich M zu bilden), und $\bigcup_{i=1}^\infty K_i = M$.

$\lceil$ Sei $\mathcal{Q}$ die Menge aller offenen Intervalle Q in $\mathbb{R}^d$, deren Eckpunkte in $\mathbb{Q}^n$ liegen, und für die $\overline{Q} \cap M$ kompakt ist (also abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$, beschränkt ist es sowieso). Die Menge ist $\mathcal{Q}$ abzählbar, und wir können schreiben $\mathcal{Q} = \{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Jedes $x \in M$ liegt in einem Q_i (Warum? *Hinweis:* Jedes x liegt in einem Kartengebiet W mit Karte $\varphi : U \to V$, und U, V sind offen in $\mathbb{R}^d$.) Setze $V_i = Q_i \cap M$. Dann $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ und $\overline{V_i} = \overline{Q_i} \cap M$ (hier bezeichnet $\overline{V_i}$ den Abschluss in M und $\overline{Q_i}$ den Abschluss in $\mathbb{R}^d$). Wähle natürliche Zahlen $1 = n_1 < n_2 < \dots$, sodass ?

$$\bigcup_{k=1}^{n_i} \overline{V_k} \;\subset\; \bigcup_{k=1}^{n_{i+1}} V_k$$

(Warum geht das? *Hinweis:* $\bigcup_{k=1}^{n_i} \overline{V_k}$ ist kompakt und wird von $M = \bigcup_{k=1}^\infty V_k$ überdeckt). Dann hat $K_i := \bigcup_{k=1}^{n_i} \overline{V_k}$ die gewünschten Eigenschaften. ? $\rfloor$

Beh. 2: Für $x \in M$ und $W \subset M$ offen in M, $x \in W$, gibt es eine stetige Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\varphi(x) > 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subset W$.

$\lceil$ Die Funktion $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $g(t) = \exp(-(1-t^2)^{-1})$ für $|t| < 1$ und $g(t) = 0$ für $|t| \geq 1$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion mit $\operatorname{Supp}(g) = [-1,1]$ (Warum?). Sei U offen in $\mathbb{R}^d$ so dass $W = M \cap U$. O.B.d.A. sei $x = 0$, und sei $\varepsilon > 0$, sodass $[-\varepsilon, \varepsilon]^{\times d} \subset U$. Setze ?

$$\tilde{\varphi}(p) \;=\; \prod_{k=1}^{d} g(p_k/\varepsilon)\ .$$

Dann $\tilde{\varphi}(0) > 0$, $\tilde{\varphi}(p) = 0$ für $p \in M \setminus W$, und $\tilde{\varphi}$ ist die eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}^d$. Die gesuchte Funktion φ ist die Einschränkung von $\tilde{\varphi}$ auf M. $\rfloor$

Beh. 3: Für $i \in \mathbb{N}$ gibt es $\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,m_i} : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\mathrm{supp}(\varphi_{i,m}) \subset \mathring{K}_{i+1} \setminus K_{i-2}$, $\mathrm{supp}(\varphi_{i,m}) \subset W_m$ für ein $W_m \in \mathcal{O}$, und $\sum_{m=1}^{m_i} \varphi_{i,m}(x) > 0$ für alle $x \in K_i \setminus \mathring{K}_{i-1}$.

⌈ Zu $x \in K_i \setminus \mathring{K}_{i-1}$ und $W \in \mathcal{O}$ mit $x \in W$ wähle $\varphi_x : M \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass $\mathrm{supp}(\varphi_x) \subset (K_{i+1} \setminus \mathring{K}_{i-2}) \cap W$ und $\varphi_x(x) > 0$ wie in Beh. 2. Sei

$$W_x \; = \; \{u \in M \,|\, \varphi_x(u) > 0\} \; .$$

Die Menge W_x ist offen in M, da φ_x stetig ist, und es gilt $x \in W_x$. Per Konstruktion bilden die W_x eine offene Überdeckung von $K_i \setminus \mathring{K}_{i-1}$. Da $K_i \setminus \mathring{K}_{i-1}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $W_{x_1}, \ldots, W_{x_{m_i}}$. Wähle $\varphi_{i,m} = \varphi_{x_m}$. ⌋

Die $\varphi_{i,m}$, $i \in \mathbb{N}$, $m = 1, \ldots, m_i$ aus Beh. 3 sind lokal endlich (Warum?), ? also tragen für ein gegebenes $x \in M$ in der Summe

$$\varphi(x) \; := \; \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_i} \varphi_{i,m}(x)$$

nur endlich viele Terme bei. Da $x \in K_i \setminus \mathring{K}_{i-1}$ für ein i ist $\varphi(x) > 0$ nach Beh. 3. Damit können setzen

$$\varepsilon_{i,m}(x) \; = \; \frac{\varphi_{i,m}(x)}{\varphi(x)} \; .$$

Dies erfüllt die Bedingungen einer Zerlegung der Eins, die der Überdeckung $\mathcal{O}$ untergeordnet ist (für Stetigkeit siehe Teil (ii)).

Teil (ii):
Dies folgt aus der Konstruktion der $\varphi_{i,m}$ in Beh. 2. (Wie? *Hinweis:* Um zu ? sehen, dass die unendliche Summe in $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n_i} \varphi_{i,m}(x)$ die $\mathcal{C}^\infty$-Eigenschaft erhält, ist es wichtig, dass in einer ganzen Umgebung von x nur endlich viele Summanden nicht verschwinden.) □

Korollar 13.5.3. Jeder Atlas einer Untermannigfaltigkeit hat einen höchstens abzählbaren Teilatlas (d.h. eine Teilmenge von Karten, die auch wieder ein Atlas ist).

Beweis. Seien $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ die Kartengebiete eines Atlanten für M. In Beh. 2 im obigen Beweis haben wir gesehen, dass $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ mit K_i kompakt. Jedes K_i wird seinerseits bereits von endlich vielen W_α überdeckt. □

13.6 Integration über Untermannigfaltigkeiten

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 11.5 aus Königsberger 2].)

In diesem Kapitel bezeichnet $M \subset \mathbb{R}^d$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Lemma 13.6.1. Sei $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion. Angenommen, es gibt Kartengebiete W, W' von M mit $\operatorname{supp}(f) \subset W$ und $\operatorname{supp}(f) \subset W'$. Dann gilt

$$\int_W f\big|_W \, dS \;=\; \int_{W'} f\big|_{W'} \, dS \;,$$

wobei die Integrale nach Definition 13.4.4 gegeben sind.

Beweis von Lemma 13.6.1. Sei $V = W \cap W'$. Per Annahme gilt $\operatorname{supp}(f) \subset V$. Seien $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $\gamma' : \Omega' \to \mathbb{R}^d$ Einbettungen mit Spuren $W = \gamma(\Omega)$ und $W' = \gamma'(\Omega')$. Setze $\Lambda := \gamma^{-1}(V)$ und $\Lambda' := \gamma'^{-1}(V)$. Da γ, γ' stetig sind, sind Λ, Λ' offen in $\mathbb{R}^n$. Setze $\tilde{\gamma} := \gamma|_\Lambda$ und dito für $\tilde{\gamma}'$.

Dann ist auch V Kartengebiet, und $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ haben Spur V (Warum?). Es gilt ?

$$\int_W f\big|_W \, dS \;=\; \int^{\gamma} f\big|_W \;\overset{(*)}{=}\; \int^{\tilde{\gamma}} f\big|_V \;=\; \int_V f\big|_V \, dS$$

(Warum gilt die Gleichheit $(*)$? *Hinweis:* Schreiben Sie beide Seiten aus wie in Definition 13.4.2.) Genauso sieht man $\int_{W'} f\big|_{W'} dS = \int_V f\big|_V dS$. Hier benutzen wir implizit, dass das Integral über ein Kartengebiet von der Wahl der Einbettung unabhängig ist (Lemma 13.4.3 und Definition 13.4.4). ☐ ?

■ Für Funktionen f auf M mit Träger in einem Kartengebiet W setzen wir:

$$\int_M f \, dS \;:=\; \int_W f\big|_W \, dS \;.$$

Wegen des obigen Lemmas ist dies unabhängig von der Wahl des Kartengebietes W. Die Begriffe „*f ist auf M messbar*“ und „*das Integral von $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert auf M*“ werden genauso über die Wahl eines Kartengebietes W mit $\operatorname{supp}(f) \subset W$ definiert (siehe Bemerkung 13.4.5 (3)) und sind unabhängig von dieser Wahl.

Das Integral von allgemeinen Funktionen können wir mit Hilfe einer Zerlegung der Eins definieren:

Definition 13.6.2. Sei $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion. Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas für M und sei $\mathcal{O}$ die offene Überdeckung von M, die durch die Kartengebiete von $\mathcal{A}$ gegeben ist. Sei $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine der offenen Überdeckung $\mathcal{O}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Die Funktion f heißt *integrierbar über M*, falls

(i) jedes $f\varepsilon_i$ über M integrierbar ist (im obigen Sinne des Integrals von Funktionen mit Träger in einem Kartengebiet), und

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \, dS \;<\; \infty$.

In diesem Fall heißt

$$\int_M f \, dS \;:=\; \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f \, \varepsilon_i \, dS$$

das *Integral von* f *über* M.

■ Die Reihe in der Definition von $\int_M f \, dS$ konvergiert absolut. (Warum?) ?

Satz 13.6.3. Sei $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion. Sind die Bedingungen an f in Definition 13.6.2 für einen Atlas $\mathcal{A}$ erfüllt, so auch für jeden anderen Atlas. Der Wert von $\int_M f \, dS$ ist unabhängig von der Wahl des Atlanten und von der Wahl der Zerlegung der Eins.

Beweis. Sei $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung der Eins, die $\mathcal{A}$ untergeordnet ist. Der Träger von ε_i sei in einem Kartengebiet W_i von $\mathcal{A}$ enthalten.

Sei nun $\mathcal{B}$ ein weiterer Atlas mit untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Der Träger von η_j sei entsprechend in einem Kartengebiet V_j von $\mathcal{B}$ enthalten. Dann ist

$$\{\varepsilon_i \, \eta_j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

eine Zerlegung der Eins, die sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ untergeordnet ist. (Warum? Und warum gilt weiterhin lokale Endlichkeit?) ?

Beh. 1: $f\varepsilon_i\eta_j$ ist über M integrierbar.

(Warum? *Hinweis:* $|f|\varepsilon_i$ ist eine Dominate für $f\varepsilon_i\eta_j$. Machen Sie hieraus eine Aussage über Lebesgue-Integrale im $\mathbb{R}^n$.) ?

Beh. 2: $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \int_M |f|\varepsilon_i\eta_j \, dS < \infty$.

⌈ Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N} \int_M |f|\varepsilon_i\eta_j dS \;&\overset{(1)}{\leq}\; \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i\eta_j dS \\ &\overset{(2)}{=}\; \sum_{i=1}^{N} \int_M \sum_{j=1}^{\infty} |f|\varepsilon_i\eta_j dS \;\overset{(3)}{=}\; \sum_{i=1}^{N} \int_M |f|\varepsilon_i dS \;\overset{(4)}{<}\; \infty\end{aligned}$$

(Warum gelten (1)–(4)? *Hinweis:* Bei (2) hilft Lemma 13.4.7 (ii).) ⌋ ?

Also ist die Reihe aus der Behauptung absolut konvergent. Nach dem großen Umordnungssatz (Bemerkung 11.4.12) konvergieren für alle $a, b \in \mathbb{N}$ die Reihen

$$A_a := \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\, \varepsilon_a \eta_j \, dS \quad , \quad B_b := \sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\, \varepsilon_i \eta_b \, dS$$

absolut, und es gilt

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_a \; = \; \sum_{b=1}^{\infty} B_b \; ,$$

wobei auch hier beide Seiten absolut konvergieren. Mit dominierter Konvergenz (Lemma 13.4.7 (iii)) folgt

$$A_a = \int_M |f|\, \varepsilon_a \, dS \quad , \quad B_b = \int_M |f|\, \eta_b \, dS \; .$$

(Details? Was ist jeweils die dominierende integrierbare Funktion?) Insbesondere ist $f\eta_b$ über M integrierbar (Eigenschaft (i) aus Definition 13.6.2), und es gilt ?

$$\sum_{b=1}^{\infty} \int_M |f|\, \eta_b \, dS \; = \; \sum_{b=1}^{\infty} |B_b| \; < \; \infty$$

(Eigenschaft (ii) aus Definition 13.6.2).

Wiederholt man das obige Argument mit f statt $|f|$, so gibt die Gleichheit der Summen über A_a und B_b, dass

$$\sum_{a=1}^{\infty} \int_M f\, \varepsilon_a \, dS \; = \; \sum_{b=1}^{\infty} \int_M f\, \eta_b \, dS \; .$$

□

Bemerkung 13.6.4. Die Begriffe „*f ist auf M messbar*“ und „*das Integral von $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert auf M*“ werden ebenfalls über die Wahl eines Atlanten und einer untergeordneten Zerlegung der Eins definiert, und sind von diesen Wahlen unabhängig.

(Warum? Insbesondere: Warum gilt das für die Messbarkeit? *Hinweis:* Hier ist in Definition 13.6.2 nur Punkt (i) ein Teil der Bedingung: „$f\varepsilon_i$ ist messbar“. Es ist zu zeigen, dass auch $f\eta_j$ messbar ist. Wegen $f\eta_j = \sum_{i=1}^{\infty} f\varepsilon_i\eta_j$ ist $f\eta_j$ ein Grenzwert messbarer Funktionen.) ?

Für $A \subset M$ und f eine Funktion auf A sei f_A die Funktion auf M, die durch $f_A(x) = f(x)$ gegeben ist, falls $x \in A$, und $f_A(x) = 0$ für $x \in M \setminus A$.

Definition 13.6.5. Sei $A \subset M$.

(i) A heißt *messbar*, falls die charakteristische Funktion χ_A auf M messbar ist.

(ii) Eine Funktion f auf A heißt *über A integrierbar*, falls f_A über M integrierbar ist. Wir schreiben dann auch $\int_A f\,dS$ statt $\int_M f_A\,dS$.

(iii) A heißt *n-Nullmenge*, falls A messbar ist, und $\int_A 1\,dS = 0$.

Beispiel 13.6.6.

(1) Beh.: Sei $A \subset M$. Falls A in M offen oder abgeschlossen ist, so ist A auf M messbar.

⌈ Angenommen, A ist offen in M. Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas für M und $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir müssen zeigen, dass alle $\varepsilon_i\chi_A$ messbar sind. Sei W_i ein Kartengebiet mit $\operatorname{supp}(\varepsilon_i) \subset W_i$. Sei $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Einbettung mit Spur W_i. Dann ist $\gamma^{-1}(A)$ offen in $\mathbb{R}^n$, also ist $\varepsilon_i\chi_A$ messbar auf M. Das Argument für A abgeschlossen ist das gleiche. ⌋

(2) Beh.: Sei $N, M \subset \mathbb{R}^d$ Untermannigfaltigkeiten von Dimension n, bzw. m. Falls $n < m$ und $N \subset M$, so ist N eine m-Nullmenge in M.

(→Übung [Z11A2])

Satz 13.6.7.

(i) Die Menge der auf M integrierbaren Funktionen $M \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und das Integral $\int_M(-)dS$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(ii) Seien f, g auf M integrierbar. Falls sich f und g nur auf einer n-Nullmenge unterscheiden, so gilt $\int_M f\,dS = \int_M g\,dS$.

(→Übung [Z11A2])

Satz 13.6.8. Sei $A \subset M$ kompakt. Stetige Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ sind auf M integrierbar.

(→Übung [Z11A2])

Beispiel 13.6.9. Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre von Radius 1, und sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = x^2$. Nach Satz 13.6.8 ist f über S^2 integrierbar.

Wie in Beispiel 13.4.6 (3) sei $\Omega = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \cdot \cos u \\ \cos v \cdot \sin u \\ \sin v \end{pmatrix} \quad .$$

Wir zerlegen S^2 disjunkt als $S^2 = \gamma(\Omega) \cup N$, wobei $N = \{(x,y,z) \in S^2 \,|\, y = 0\,,\ x \leq 0\}$. Die Menge $\gamma(\Omega)$ ist messbar, da offen in S^2, und somit ist $f\chi_{\gamma(\Omega)}$ messbar. Die Menge N ist eine 2-Nullmenge, da es in einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit in S^2 enthalten ist (Beispiel 13.6.6). Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{S^2} f\,dS \;&=\; \int_{S^2} \big(f\chi_{\gamma(\Omega)} + f\chi_N\big) dS \;=\; \int_{\gamma(\Omega)} x^2\,dS \\ &=\; \int_\Omega (\cos(v)\cos(u))^2 \cos(v)\,dS \;=\; \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos u)^2 du}_{=\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^3 dv}_{=\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

Satz 13.6.10. (Dominierte Konvergenz für Untermannigfaltigkeiten)
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf M integrierbaren Funktionen, die punktweise gegen f konvergieren, und sei F auf M integrierbar mit $|f_k| \leq F$ auf M. Dann ist f auf M integrierbar, und es gilt

$$\int_M f\,dS \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_M f_k\,dS\ .$$

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas für M und $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Für die Funktionen $f\varepsilon_i$ und $f_k\varepsilon_i$ gilt die Aussage schon (Lemma 13.4.7 (iii)). Da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\,\varepsilon_i\,dS \;\leq\; \sum_{i=1}^{\infty} \int_M F\,\varepsilon_i\,dS \;=\; \int_M F\,dS \;<\; \infty\ ,$$

ist f auf M integrierbar. Ferner

$$\begin{aligned}\int_M f\,dS \;&=\; \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f\varepsilon_i\,dS \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \int_M f_k\varepsilon_i\,dS \\ &\overset{(*)}{=}\; \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f_k\varepsilon_i\,dS \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_M f_k\,dS\end{aligned}$$

Die Gleichung $(*)$ ist selbst eine Instanz von dominierter Konvergenz, aber für unendliche Summen (die ja ein Spezialfall von Lebesgue-Integration sind, siehe Beispiel 11.4.6 (2)). (Details? *Hinweis:* Setze $a_k(i) = \int_M f_k\varepsilon_i\,dS$. Dann ist $\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} a_k(i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_k(i)$ zu zeigen. Mit $b(i) = \int_M F\varepsilon_i\,dS$ gilt $|a_k(i)| \leq b(i)$ und $\int_{\mathbb{N}} b\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} b(i) = \int_M F\,dS < \infty$.) ? □

14 Der Satz von Stokes

14.1 Alternierende Multilinearformen

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 13.1 aus Königsberger 2].)

Definition 14.1.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $k \geq 1$. Eine *alternierende Multilinearform vom Grad k auf V (mit Werten in $\mathbb{R}$)*, oder kurz *k-Form*, ist eine Abbildung

$$\omega \ : \ \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ Faktoren}} \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ ,$$

sodass

(i) *(multilinear)* ω in jedem Argument V linear ist, und

(ii) *(alternierend)* ω Null ist, wenn zwei Argumente gleich sind: für alle $v \in V$,

$$\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0 \ .$$

Die Menge der k-Formen wird mit $\mathrm{Alt}^k(V)$ bezeichnet. Für $k = 0$ setzen wir $\mathrm{Alt}^0(V) := \mathbb{R}$.

Bemerkung 14.1.2.

(1) $\mathrm{Alt}^k(V)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum via punktweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren (Details?). Es gilt $\mathrm{Alt}^1(V) = V^*$, der Dualraum zu V. ?

(2) Eine k-Form ist alternierend in dem Sinne, dass sie ihr Vorzeichen wechselt, wenn man zwei Argumente vertauscht:

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) \ = \ -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$$

für alle $1 \leq i < j \leq k$. (Warum? *Hinweis:* Setzen Sie $v = v_i + v_j$ in Argument i und j ein.) ?

(3) Mit (2) sieht man allgemeiner: Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$, $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\pi \in S_k$ eine Permutation von k Elementen gilt

$$\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \ = \ \mathrm{sgn}(\pi)\, \omega(v_1, \dots, v_k) \ ,$$

wobei $\mathrm{sgn}(\pi)$ das Signum der Permutation π bezeichnet.

(4) Sei $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $i \neq j$ gilt

$$\omega(v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_k) \;=\; \omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \;,$$

wobei auf der linken Seite im i-ten Argument $v_i + \lambda v_j$ statt v_i steht. Damit kann man folgende Behauptung zeigen:

Beh.: Falls $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig sind, so gilt $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Aus der Behauptung folgt, dass $\mathrm{Alt}^k(V) = \{0\}$ für $\dim(V) = n$ und $k > n$. (Warum gilt die Behauptung und die Folgerung?) ?

(5) Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\det : V^{\times n} \to \mathbb{R} \quad , \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

eine n-From. In der Tat gibt es für jedes $\omega \in \mathrm{Alt}^n(\mathbb{R}^n)$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\omega = \lambda \det$. Dies folgt mit (4) so ähnlich wie im Beweis von Satz 13.3.2. In anderen Worten, $\mathrm{Alt}^n(\mathbb{R}^n)$ ist ein-dimensional mit Basis $\{\det\}$.

(6) Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ und $\eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$ betrachte die Funktion

$$f : V^{\times(k+l)} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l) \;=\; \omega(v_1, \ldots, v_k)\, \eta(w_1, \ldots, w_l) \,.$$

Die Funktion f ist multilinear, aber im allgemeinen nicht alternierend. (Warum? Fällt Ihnen ein Gegenbeispiel ein?) ?

Definition und Satz 14.1.3. (Dachprodukt von Formen)
Für $k, l \geq 0$ und $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$ definiere $\omega \wedge \eta : V^{\times(k+l)} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}&(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\ &\quad = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\pi)\, \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})\, \eta(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+l)}) \,.\end{aligned}$$

Es gilt:

(i) $\omega \wedge \eta$ ist eine $(k+l)$-Form, und wir erhalten eine bilinear Abbildung

$$\wedge : \mathrm{Alt}^k(V) \times \mathrm{Alt}^l(V) \longrightarrow \mathrm{Alt}^{k+l}(V) \;, \quad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta \,.$$

(ii) Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$, $\mu \in \mathrm{Alt}^m(V)$ gilt

$$\omega \wedge \eta \;=\; (-1)^{kl}\, \eta \wedge \omega \quad , \quad \omega \wedge (\eta \wedge \mu) \;=\; (\omega \wedge \eta) \wedge \mu$$

(iii) Für $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \operatorname{Alt}^1(V)$ und $v_1, \dots, v_k \in V$ gilt

$$\big(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k\big)(v_1, \dots, v_k) \;=\; \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \cdots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} \quad .$$

Der Beweis ist eine →Übung [Z11A2].

Beispiel 14.1.4. Für $c \in \operatorname{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$ und $\omega \in \operatorname{Alt}^k(V)$ gilt $c \wedge \omega = c\omega$ (Skalarmultiplikation). Für $\varphi, \psi \in \operatorname{Alt}^1(V) = V^*$ und $u, v \in V$ gilt

$$(\varphi \wedge \psi)(u, v) \;=\; \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u) \ .$$

Satz 14.1.5. Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von $\operatorname{Alt}^1(V) = V^*$. Dann ist

$$\big\{\, \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \,\big|\, 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \,\big\}$$

eine Basis von $\operatorname{Alt}^k(V)$.

Bemerkung 14.1.6. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $k > n$ ist die Basis in Satz 14.1.5 leer, entsprechend gilt $\operatorname{Alt}^k(V) = \{0\}$, siehe Bemerkung 14.1.2 (4). Für $1 \le k \le n$ gilt $\dim \operatorname{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$. Insbesondere $\dim \operatorname{Alt}^n(V) = 1$, wie wir in Bemerkung 14.1.2 (5) schon gesehen haben.

Beweis von Satz 14.1.5. Für $k > n$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k \le n$. Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ die zu $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ duale Basis (d.h. $\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j}$). Sei $\mathcal{B} \subset \operatorname{Alt}^k(V)$ die Menge aus der Aussage des Satzes.

Beh.: $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.

⌈ Für $1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n$ und $1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n$ gilt

$$\begin{aligned} \big(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}\big)(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \;&=\; \det\big((\varphi_{i_a}(v_{j_b}))_{ab}\big) \\ &=\; \begin{cases} 1 & : i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

(Was hat das mit linearer Unabhängigkeit zu tun?) ⌋ ?

Beh.: $\mathcal{B}$ erzeugt $\operatorname{Alt}^k(V)$.

⌈ Für $1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n$ setze

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} := \omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \;\in\; \mathbb{R} \ .$$

Dann gilt

$$\omega \; = \sum_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_k\leq n} \omega_{i_1,\dots,i_k}\, \varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k} \; .$$

(Warum? *Hinweis:* Warum genügt es, dies auf Basisvektoren v_{j_1}, …, v_{j_k} mit $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq n$ zu prüfen?) ⌋ ?

□

Definition und Satz 14.1.7. (Zurückziehen von Multilinearformen)
Seien V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(i) Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(W)$ setze

$$(T^*\omega)(v_1,\dots,v_k) \; := \; \omega(Tv_1,\dots,Tv_k) \; .$$

Dies ist eine k-Form und heißt die *entlang T zurückgezogene k-Form.* Man erhält eine lineare Abbildung

$$T^* \;:\; \mathrm{Alt}^k(W) \to \mathrm{Alt}^k(V) \quad , \quad \omega \mapsto T^*\omega \; .$$

(ii) Für $\omega \in \mathrm{Alt}^k(W)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^l(W)$ gilt

$$T^*(\omega\wedge\eta) \; = \; (T^*\omega)\wedge(T^*\eta) \; .$$

(iii) Sei U ein weiterer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $S : U \to V$ linear. Es gilt

$$(T\circ S)^* \; = \; S^*\circ T^* \;:\; \mathrm{Alt}^k(W) \to \mathrm{Alt}^k(U) \; .$$

(iv) Falls $T : V \to V$, $\dim(V) = n$ und $\omega \in \mathrm{Alt}^n(V)$, so gilt $T^*\omega = \det(T)\,\omega$.

Beweis. Teile (i)–(iii): Direktes nachrechnen. (Details?) ?

Teil (iv): Sei $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von V mit dualer Basis $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in V^*$. Nach Satz 14.1.5 gilt

$$\omega \; = \; c\,\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n \; .$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(T^*\omega)(v_1,\dots,v_n) \; &= \; \omega(Tv_1,\dots,Tv_n) \; \overset{(*)}{=} \; c\,\det\begin{pmatrix}\varphi_1(Tv_1) & \cdots & \varphi_1(Tv_k)\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_k(Tv_1) & \cdots & \varphi_k(Tv_k)\end{pmatrix}\\ &= \; \det(T)\,\underbrace{c\,(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n)(v_1,\dots,v_n)}_{=\,\det(T)\,\omega(v_1,\dots,v_n)} \; ,\end{aligned}$$

wobei $(*)$ aus Satz 14.1.3 (iii) folgt. □

14.2 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

Definition 14.2.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Differentialform von Grad k* (oder *k-Form*) *auf U* ist eine Abbildung

$$\omega \ : \ U \longrightarrow \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n) \ .$$

Für $x \in U$ und $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir statt $(\omega(x))(v_1, \ldots, v_k)$ auch

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_k) \qquad (\in \mathbb{R}) \ .$$

Die Menge der k-Formen auf U bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^k(U)$.

Bemerkung 14.2.2.

(1) Da $\mathrm{Alt}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ ist somit $\mathcal{A}^0(U)$ gerade die Menge aller Funktionen $U \to \mathbb{R}$ (ohne weitere Eigenschaften wie integrierbar, stetig oder differenzierbar).

(2) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist das totale Differential df eine Abbildung $df : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^n)$. Also $f \in \mathcal{A}^0(U)$ und $df \in \mathcal{A}^1(U)$. Wir können also d als eine Abbildung

$$d \ : \ \{ f \in \mathcal{A}^0(U) \,|\, f \text{ differenzierbar} \} \longrightarrow \mathcal{A}^1(U) \ .$$

verstehen.

(3) Betrachte die Funktion $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$. Die 1-Form $dx_i \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch, für $p \in \mathbb{R}^n$ und e_j der j-te Standardbasisvektor von $\mathbb{R}^n$,

$$(dx_i)_p(e_j) \ = \ \delta_{i,j} \ . \qquad (*)$$

(Warum?) Somit ist $(dx_i)_p$, $i = 1, \ldots, n$ eine Basis von $\mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^n)$. Für $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist es also möglich, df_p in der Basis $(dx_i)_p$ zu entwickeln: ?

Beh.: Auf U gilt

$$\underbrace{df}_{\in \mathcal{A}^1(U)} \ = \ \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\partial_i f}_{\in \mathrm{Fun}(U,\mathbb{R})} \cdot \underbrace{dx_i}_{\in \mathcal{A}^1(U)} \quad : \ U \to \mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

wobei $\partial_i f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ die partielle Ableitung nach dem i-ten Argument von f ist.

⌈ Wir zeigen die Gleichung für alle $p \in U$ und Basisvektoren $e_j \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $df_p(e_j) = \partial_j f(p)$ (Richtungsableitung in Richtung e_j and er Stelle p). Wegen $(*)$ ergibt die rechte Seite das gleiche Ergebnis. ⌋

(4) Das Dachprodukt von $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ und $\eta \in \mathcal{A}^l(U)$ ist punktweise definiert:

$$(\omega \wedge \eta)_x \;:=\; \omega_x \wedge \eta_x \;.$$

Betrachte zum Beispiel $\omega \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^3)$ und $\eta \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\omega \;=\; x^2 dx + z dy \quad , \quad \eta \;=\; e^y dx \wedge dz \;.$$

Dann

$$\omega \wedge \eta \;=\; x^2 e^y \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} \wedge dz + z e^y dy \wedge dx \wedge dz \;=\; -z e^y \, dx \wedge dy \wedge dz$$

(Warum gelten die Gleichheiten? *Hinweis:* Werten Sie an einem Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ aus und benutzen Sie die Eigenschaften von $\wedge$ auf $\mathrm{Alt}^\bullet(\mathbb{R}^n)$ aus Satz 14.1.3.) ?

Lemma 14.2.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Jedes $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ kann eindeutig als Linearkombination

$$\omega \;=\; \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1,\ldots,i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

geschrieben werden, wobei die Funktionen $\omega_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) \;:=\; \omega_x(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

gegeben sind.

Das Lemma folgt aus Satz 14.1.5 und $(*)$ in Bemerkung 14.2.2 (3). (Wie?) ?

■ Wir nennen $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ stetig / differenzierbar / von Klasse $\mathcal{C}^p$, falls alle Funktionen $\omega_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ die entsprechende Eigenschaft haben.

Definition 14.2.4. Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\phi : U \to V$ differenzierbar. Definiere die Abbildung

$$\phi^* : \mathcal{A}^k(V) \to \mathcal{A}^k(U) \quad , \quad \omega \mapsto \phi^* \omega \;,$$

wobei, für $p \in U$,

$$(\phi^*\omega)_p \;:=\; \underbrace{(d\phi(p))^*}_{\text{aus Satz 14.1.7}} \; \omega_{\phi(p)} \qquad (\in \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^m)\,)$$

Wir sagen, die k-Form $\phi^*\omega$ wurde duch *Zurückziehen von ω mittels ϕ* erhalten.

Bemerkung 14.2.5.

(1) Wenn man Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ einsetzt, sieht die obige Formel für das Zurückholen der k-Formen $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ via $\phi : U \to V$ so aus:

$$(\phi^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) \;=\; \omega_{\phi(p)}\big(\, d\phi(p)v_1, \dots, d\phi(p)v_k \,\big) \;.$$

(2) Die Abbildung ϕ^* ist linear.

(3) Die Rechenregeln aus Satz 14.1.7 gelten auch für Differenzialformen: für $\phi : U \to V$, $\psi : V \to W$ differenzierbar, und für $\omega \in \mathcal{A}^k(W)$, $\eta \in \mathcal{A}^l(W)$,

$$\psi^*(\omega \wedge \eta) \;=\; (\psi^*\omega) \wedge (\psi^*\eta) \quad , \quad (\psi \circ \phi)^*\omega \;=\; (\phi^* \circ \psi^*)\omega$$

(Warum?) ?

(4) Seien $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ differenzierbar. Schreibe $\phi_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, für die Komponentenfunktionen von ϕ.

Beh.: $\phi^* dx_i = d\phi_i$ für $i = 1, \dots, n$.

⌈ Für $p \in U$ und den Basisvektor $e_j \in \mathbb{R}^m$ ergibt die linke Seite

$$\begin{aligned}(\phi^* dx_i)_p(e_j) \;&=\; (dx_i)_{\phi(p)}(d\phi(p)e_j) \\ &=\; (dx_i)_{\phi(p)}\big(\, (\partial_j\phi_1(p), \dots, \partial_j\phi_n(p)) \,\big) \;=\; \partial_j\phi_i(p) \;.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $(*)$ in Bemerkung 14.2.2 (3) benutzt. Für die rechte Seite der Behauptung benutzt man die Definition von $d\phi_i$ in Bemerkung 14.2.2 (2): $(d\phi_i)_p(e_j)$ ist die Richtungsableitung von ϕ_i in Richtung e_j. ⌋

(5) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ differenzierbar, $\omega \in \mathcal{A}^n(V)$. Mit Satz 14.1.7 (4) sieht man, für $p \in U$,

$$(\phi^*\omega)_p \;=\; \det\big(\, d\phi(p) \,\big) \cdot \omega_{\phi(p)} \;.$$

(Details?) ?

Seien $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ differenzierbar, und $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$. Nach Lemma 14.2.3 können wir ω durch Dachprodukte von 1-Formen ausdrücken:

$$\omega \;=\; \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1,\dots,i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \;.$$

Lemma 14.2.6. Es gilt

$$\phi^*\omega \;=\; \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1,\dots,i_k}\circ\phi\cdot d\phi_{i_1}\wedge\dots\wedge d\phi_{i_k}\ .$$

Beweis. Schreibe abkürzend I für ein Tupel $(i_1,\dots,i_k)$ mit $1\le i_1<\dots<i_k\le n$ und entsprechend

$$dx_I \;:=\; dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

Die Entwicklung von $\omega\in\mathcal{A}^k(V)$ aus Lemma 14.2.3 können wir in dieser Notation schreiben als

$$\omega \;=\; \sum_I \omega_I\cdot dx_I \;=\; \sum_I \omega_I\wedge dx_I\ ,$$

wobei wir die Funktion $\omega_I : V\to\mathbb{R}$ im letzten Schritt als Element von $\mathcal{A}^0(V)$ interpretieren. Es gilt (die Zahlen über den Gleichungen beziehen sich auf den entsprechenden Teil dieser Bemerkung)

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &\overset{(2)}{=} \sum_I \phi^*(\omega_I\wedge dx_I) \overset{(3)}{=} \sum_I(\phi^*\omega_I)\wedge \underbrace{(\phi^*dx_I)}_{=\phi^*dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\phi^*dx_{i_k}}\\ &\overset{(4)}{=} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1,\dots,i_k}\circ\phi\cdot d\phi_{i_1}\wedge\dots\wedge d\phi_{i_k}\ .\end{aligned}$$

□

Definition und Satz 14.2.7. (Äußere Ableitung)
Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $\omega\in\mathcal{A}^k(U)$ differenzierbar. Bezüglich der Zerlegung

$$\omega \;=\; \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1,\dots,i_k}\cdot dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\ .$$

definieren wir

$$d\omega \;:=\; \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} d\omega_{i_1,\dots,i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} \;\in\; \mathcal{A}^{k+1}(U)\ .$$

Die $(k+1)$-Form $d\omega$ heißt *äußere Ableitung* oder *Differential* von ω. Es gilt:

(i) Die Abbildung $d : \{\omega\in\mathcal{A}^k(U)\,|\,\omega \text{ diff.bar}\}\to\mathcal{A}^{k+1}(U)$ ist linear.

(ii) Für differenzierbare $\omega\in\mathcal{A}^k(U)$, $\eta\in\mathcal{A}^l(U)$ gilt

$$d(\omega\wedge\eta) \;=\; (d\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge(d\eta)\ .$$

(iii) Ist ω in der Klasse $\mathcal{C}^2$, so gilt $d(d\omega) = 0$. In anderen Worten: die Verkettung

$$\{\omega \in \mathcal{A}^k(U) \,|\, \omega \text{ ist } \mathcal{C}^2\} \xrightarrow{d} \{\rho \in \mathcal{A}^{k+1}(U) \,|\, \rho \text{ ist } \mathcal{C}^1\} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{k+2}(U)$$

ist gleich Null.

Beweis. (i) Klar.

(ii) Wegen Teil (i) genügt es, $\omega = adx_I$ und $\eta = bdx_J$ zu betrachten, mit $a, b : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) \;=\; d(abdx_I \wedge dx_J) \;\overset{\text{Def.}}{=}\; d(ab) \wedge dx_I \wedge dx_J$$

Die Produktregel für die Ableitung von Funktionen $U \to \mathbb{R}$ ergibt $d(ab) = (da) \cdot b + a \cdot (db)$. Einsetzen und Satz 14.1.3 (ii) ergibt

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= da \wedge dx_I \wedge (b\, dx_J) + (-1)^k (a\, dx_I) \wedge db \wedge dx_J \\ &= (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)\ . \end{aligned}$$

(iii) Wir zeigen die Behauptung zuerst für 0-Formen, also für $\mathcal{C}^2$-Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d\Big(\sum_{i=1}^n \partial_i f\, dx_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^n d(\partial_i f) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_i f)\, dx_j\Big) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i<j}^n \big(\partial_j\partial_i f - \partial_i\partial_j f\big)\, dx_j \wedge dx_i \;=\; 0\ . \end{aligned}$$

(Warum gelten die einzelnen Gleichheiten? Insbesondere die vorletzte?) ?

Für allgemeine k-Formen genügt es wegen der Linearität in Teil (i) ω von der Form $\omega = f dx_I$ zu betrachten, mit f eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. Es gilt

$$d(d\omega) \;=\; d(df \wedge dx_I) \;\overset{(ii)}{=}\; \underbrace{(d(df))}_{=0} \wedge dx_I) - df \wedge \underbrace{(d(dx_I))}_{=0} \;=\; 0$$

(Wie sieht $d(dx_I)$ ausgeschrieben aus (I steht ja für ein Indextupel)? Und warum ist es Null?) ?

□

■ Zum Beispiel gilt für $\omega = \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$, $\omega = \sin(xy)\,dz \wedge dx$, dass

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\sin(xy)) \wedge dz \wedge dx \;=\; (\cos(xy)ydx + \cos(xy)xdy) \wedge dz \wedge dx \\ &= \cos(xy)\,x\,dy \wedge dz \wedge dx \;=\; \cos(xy)\,x\,dx \wedge dy \wedge dz \;. \end{aligned}$$

Satz 14.2.8. Seien $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung. Falls $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ differenzierbar ist, so ist auch $\phi^*\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ differenzierbar, und es gilt

$$\phi^*(d\omega) \;=\; d(\phi^*\omega) \;.$$

Beweis. Es genügt, $\omega = f\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ zu betrachten, mit $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Nach Lemma 14.2.6 gilt

$$\phi^*\omega \;=\; f \circ \phi \cdot d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} \;=\; f \circ \phi \cdot d\phi_I \;.$$

Die 1-Formen $d\phi_{i_j}$ sind differenzierbar, da ϕ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung ist, also auch ihr Dachprodukt (Waurm?). Auch $f \circ \phi$ ist differenzierbar, und damit insgesamt $\phi^*\omega$. ?

Es gilt

$$d(\phi^*\omega) \;=\; d(f \circ \phi) \wedge d\phi_I + f \circ \phi \cdot \underbrace{d(d\phi_I)}_{=0}$$

und

$$\phi^*(d\omega) \;=\; \phi^*(df \wedge dx_I) \;=\; (\phi^*df) \wedge (\phi^*dx_I) \;=\; (\phi^*df) \wedge d\phi_I \;.$$

Es bleibt also, zu zeigen, dass $d(f \circ \phi) = \phi^*df$. Das ist aber genau die Kettenregel: Für $p \in U$ und $v \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$(\phi^*df)_p(v) \overset{\text{Bem. 14.2.5 (1)}}{=} df_{\phi(p)}\big(\,d\phi(p)v\,\big) \;=\; d(f \circ \phi)_p(v) \;.$$

□

14.3 Das Poincaré-Lemma

Definition 14.3.1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls es ein $p \in M$ gibt, sodass gilt: Für alle $x \in M$ und $t \in [0,1]$ ist $x + t(p - x) \in M$ (dies ist die gerade Verbindungsstrecke zwischen p und x).

Beispiel 14.3.2. Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\,|\,x \leq 0\,,\; y = 0\}$ ist sternförmig. Die Mengen $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\,|\,x \leq 0\,,\; y \in \{0,1\}\,\}$ sind nicht sternförmig. Konvexe Mengen sind sternförmig, nicht jede sternförmige Menge ist konvex. (Warum gilt das alles?) ?

Satz 14.3.3. (Poincaré-Lemma)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, und sei β eine $\mathcal{C}^1$-k-Form auf U mit $k \geq 1$. Falls $d\beta = 0$, so gibt es eine $\mathcal{C}^1$-$(k-1)$-Form η auf U mit $\beta = d\eta$.

Der Beweis beruht auf folgendem Lemma:

Lemma 14.3.4. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, sodass $U \times [0,1] \subset V$. Sei $\psi_j : U \to V$, $j = 0, 1$, gegeben durch $\psi_j(x) = (x, j)$. Für jede $\mathcal{C}^1$-k-Form ω auf V mit $d\omega = 0$ gibt es eine $\mathcal{C}^1$-$(k-1)$-Form η auf U mit

$$d\eta = \psi_1^*\omega - \psi_0^*\omega \ .$$

Beweis. Seien $I = (i_1, \dots, i_k)$ und $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ Multi-Indices mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < \cdots < j_{k-1} \leq n$. Nach Lemma 14.2.3 gibt es $\mathcal{C}^1$-Funktionen $f_I, g_J : V \to \mathbb{R}$, sodass

$$\omega \ = \ \sum_I f_I \, dx_I + \sum_J g_J \, dx_{n+1} \wedge dx_J \ .$$

Beh. 1: Für $p \in U$ gilt $(\psi_j^*\omega)(p) \ = \ \sum_I f_I(p, j)\, dx_I$.

⌈ Die Komponentenfunktionen von ψ_j sind $(\psi_j)_m(p) = x_m$ für $m = 1, \dots, n$ und $(\psi_j)_{n+1}(p) = j$. Nach Bemerkung 14.2.5 (4) gilt

$$\psi_j^* dx_m \ = \ d(\psi_j)_m \ = \ \begin{cases} dx_m & ; m = 1, \dots, n \\ 0 & ; m = n+1 \end{cases} \ .$$

Da dx_{n+1} in der Summe über J in ω in jedem Summanden vorkommt, folgt die Behauptung dann aus Bemerkung 14.2.5 (3). ⌋

Beh. 2: Auf V gilt $\sum_I (\partial_{n+1} f_I)\, dx_I \ = \ \sum_J \sum_{m=1}^n (\partial_m g_J)\, dx_m \wedge dx_J$.

⌈ Die äußere Ableitung von ω ist

$$\begin{aligned} d\omega \ &= \ \sum_I df_I \wedge dx_I + \sum_J dg_J \wedge dx_{n+1} \wedge dx_J \\ &= \ \sum_{m=1}^{n+1} \Big(\sum_I \partial_m f_I \, dx_m \wedge dx_I + \sum_J \partial_m g_J \, dx_m \wedge dx_{n+1} \wedge dx_J \Big) \ . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $d\omega = 0$. Koeffizientenvergleich von Basiselementen, die den Faktor dx_{n+1} enthalten, ergibt

$$\sum_I \partial_{n+1} f_I \, dx_{n+1} \wedge dx_I + \sum_J \sum_{m=1}^n \partial_m g_J \, dx_m \wedge dx_{n+1} \wedge dx_J \ = \ 0 \ .$$

(Warum? Und warum impliziert das die Behauptung, fehlt da nicht ein Minus?) ⌋ (?)

Setze

$$h_J : U \to \mathbb{R} \quad , \quad h_J(p) \;=\; \int_0^1 g_J(p,s)\,ds \;.$$

Beh. 3: h_J ist auf U stetig differenzierbar, und es gilt $\partial_m h_J(p) \;=\; \int_0^1 \partial_m g_J(p,s)\,ds$ für $p \in U$.

⌈ Wir wollen Satz 11.6.3 anwenden. Da p in U und U offen, gibt es eine ε-Umgebung von p, die auch in U liegt. Wir betrachten den abgeschlossenen Ball $\overline{B}_{\varepsilon/2}(p)$. Per Konstruktion gilt $K := \overline{B}_{\varepsilon/2}(p) \times [0,1] \subset V$. Die Menge K ist kompakt, und sowohl g_J also auch $\partial_m g_J$ sind stetig, und daher beschränkt auf K. Eine genügend große konstante Funktion auf $[0,1]$ gibt also eine integrierbare Schranke für $\partial_m g_J$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 11.6.3 mit $X = B_{\varepsilon/2}(p)$ (offener Ball) und $T = [0,1]$. ⌋

Mit den obigen Resultaten können wir die gewünschte k-Form $\eta \in \mathcal{A}^k(U)$ angeben und die geforderten Eigenschaften nachprüfen. Wir setzen

$$\eta \;:=\; \sum_J h_J\,dx_J \;.$$

Nach Beh. 3 ist η eine $\mathcal{C}^1$ k-Form. Die äußere Ableitung ist

$$\begin{aligned}
d\eta(p) \;&=\; \sum_J dh_J \wedge dx_J \\
&\overset{\text{Beh. 3}}{=} \sum_J \sum_{m=1}^n \Big(\int_0^1 \partial_m g_J(p,s)\,ds\Big) dx_m \wedge dx_J \\
&\overset{\text{Beh. 2}}{=} \sum_I \underbrace{\Big(\int_0^1 \partial_{n+1} f_I(p,s)\,ds\Big)}_{=\; f_I(p,1)-f_I(p,0)} dx_I \overset{\text{Beh. 1}}{=} (\psi_1^*\omega)(p) - (\psi_0^*\omega)(p) \;.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 14.3.3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei U sternförmig bezüglich 0. (Wie führt man den allgemeinen Fall auf den Fall „sternförmig bezüglich 0“ zurück?) ?

Sei $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\phi(x,t) = t \cdot x$. Setze $V = \phi^{-1}(U)$. Dann ist $\omega = \phi^*\beta$ eine k-Form auf V. Da ϕ $\mathcal{C}^\infty$ ist[1], und β $\mathcal{C}^1$ ist, ist $\phi^*\beta$ ebenfalls $\mathcal{C}^1$. Da U bezüglich 0 sternförmig ist, folgt aus $x \in U$, dass auch $tx \in U$ für $t \in [0,1]$. Somit $U \times [0,1] \subset V$. (Warum?) ?

[1] $\mathcal{C}^2$ würde auch reichen, nicht aber $\mathcal{C}^1$, da die Form $\phi^*\beta$ auch von den Ableitungen von ϕ abhängt.

Seien $\psi_0, \psi_1 : U \to V$ wie in Lemma 14.3.4. Nach Satz 14.2.8 gilt $d\omega = d(\phi^*\beta) = \phi^*(d\beta) = 0$. Nach Lemma 14.3.4 gibt es eine $\mathcal{C}^1$-Form η auf U mit $d\eta = \psi_1^*\omega - \psi_0^*\omega$. Für $j \in \{0,1\}$ gilt $\psi_j^*\omega = \psi_j^*\phi^*\beta = (\phi \circ \psi_j)^*\beta$. Nun ist $\phi \circ \psi_1 = \mathrm{id}$ auf U und $\phi \circ \psi_0 = 0$. Daher insgesamt $d\eta = \omega - 0$. □

Bemerkung 14.3.5.

(1) Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen scheibe $\Omega^k(U)$ für k-Formen auf U, die $\mathcal{C}^\infty$ sind. Für $k \geq 0$ bezeichne $d^k : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ die äußere Ableitung. Wir erhalten den *Ko-Kettenkomplex*

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{k-2}} \Omega^{k-1}(U) \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega^k(U) \xrightarrow{d^k} \Omega^{k+1}(U) \xrightarrow{d^{k+1}} \cdots$$

und es gilt für jedes k, dass $\mathrm{im}(d^{k-1}) \subset \ker(d^k)$. Wir definieren die *$k$-te (de Rham) Kohomologiegruppe* als

$$H^k(U) \ := \ \ker(d^k) \,/\, \mathrm{im}(d^{k-1}) \ .$$

Für $k = 0$ setzen wir hierbei $\mathrm{im}(d^{-1}) = \{0\}$ (wir stellen uns den Komplex für negative k durch Null fortgesetzt vor).

(2) Kohomologiegruppen sind invariant unter $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismen: Sei $\phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Dann sind $H^k(U)$ und $H^k(V)$ isomorph als $\mathbb{R}$-Vektorräume. (Warum? Können Sie einen Isomorphismus angeben? *Hinweis:* $\phi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, der mit d vertauscht.) ?

(3) Das Argument in Beh. 3 des Beweises von Lemma 14.3.4 zeigt, dass, falls β im Poincaré-Lemma (Satz 14.3.3) von der Klasse $\mathcal{C}^p$ ist, so auch das η, welches dort konstruiert wird. Daher sagt das Poincaré-Lemma:

$$U \text{ sternförmig} \qquad \Rightarrow \qquad H^k(U) \ = \ \begin{cases} \mathbb{R} & ; k = 0 \\ \{0\} & ; \text{sonst} \end{cases} \ .$$

(Warum? *Hinweis:* Für $k = 0$ kann man z.B. den Schrankensatz (Satz 9.3.10) nehmen und entsprechend für sternförmige Mengen umformulieren.) ?

14.4 Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten

(Dieses Kapitel folgt [Kap. 13.3 aus Königsberger 2].)

In diesem Kapitel bezeichnet M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$.

Definition 14.4.1. Ein *Atlas aus Einbettungen* für M ist eine Familie $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$, sodass

(i) die $\gamma_\alpha : \Omega_\alpha \to \mathbb{R}^d$ ($\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ offen) Einbettungen sind, und

(ii) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ mit $U_\alpha = \gamma_\alpha(\Omega_\alpha)$ die Spur von γ_α.

Bemerkung 14.4.2.

(1) Nach Lemma 13.4.1 existiert für jedes M ein Atlas aus Einbettungen.

(2) Wir setzen $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, $\Omega_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta}) \subset \Omega_\alpha$ (so dass $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$, aber im Allgemeinen nicht $\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\beta\alpha}$). Nach Satz 13.2.9 gibt es einen Diffeomorphismen $T_{\alpha\beta} : \Omega_{\alpha\beta} \to \Omega_{\beta\alpha}$, so dass $\gamma_\beta \circ T_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha|_{\Omega_{\alpha\beta}}$.

(3) Ist M eine $\mathcal{C}^p$-Untermannigfaltigkeit, so können die γ_α so gewählt werden, dass auch die $T_{\alpha\beta}$ $\mathcal{C}^p$-Diffeomorphismen sind. (Warum? *Hinweis:* Die Karten sind dann per Definition $\mathcal{C}^p$, und in Lemma 13.4.1 hatten wir uns die Einbettungen aus den Inversen der Karten gebauen. Wie kann man dann $T_{\alpha\beta}$ durch die Karten ausdrücken?)

Lemma 14.4.3. Sei $x \in M$ und seien $\gamma_i : \Omega_i \to M$, $i = 1, 2$, Einbettungen mit $x \in \gamma_i(\Omega_i)$. Mit $p_i = \gamma_i^{-1}(x) \in \Omega_i$ gilt

$$d\gamma_1(p_1)(\mathbb{R}^n) \;=\; d\gamma_2(p_2)(\mathbb{R}^n)$$

(Gleichheit von Untervektorräumen im $\mathbb{R}^n$).

Beweis. Sei $U_i = \gamma_i(\Omega_i)$ wie oben. Da $x \in U_{12}$ folgt $p_1 \in \Omega_{12}$ und $p_2 \in \Omega_{21}$. Ferner gilt $\gamma_1|_{\Omega_{12}} = \gamma_2 \circ T_{12}|_{\Omega_{12}}$, und damit auch $d\gamma_1(p_1) = d\gamma_2(p_2) \circ dT_{12}(p_1)$. Da T_{12} ein Diffeomorphismus ist, ist $dT_{12}(p_1)$ invertierbar, und somit $dT_{12}(p_1)\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$. Es folgt

$$\gamma_1(p_1)(\mathbb{R}^d) = d\gamma_2(p_2)\big(dT_{12}(p_1)(\mathbb{R}^d)\big) = d\gamma_2(p_2)(\mathbb{R}^d)\ .$$

□

Definition 14.4.4. Sei $x \in M$ und sei $\gamma : \Omega \to M$ eine Einbettung mit $x \in \gamma(\Omega)$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$T_xM \;:=\; d\gamma\big(\gamma^{-1}(x)\big)(\mathbb{R}^n) \quad \subset \mathbb{R}^d$$

heißt *Tangentialraum von M an x*.

Bemerkung 14.4.5.

(1) Nach Lemma 14.4.3 ist T_xM unabhängig von der Wahl von γ.

(2) Da γ insbesondere eine Immersion ist, ist $d\gamma(u)$ für alle $u \in \Omega$ injektiv. Somit gilt $\dim T_x M = n$.

Beispiel 14.4.6.

(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion und $b \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert, sodass $M := f^{-1}(\{b\})$ nicht leer ist. Nach Satz 13.1.6 ist M eine $n := d - k$ dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beh.: Für $x \in M$ gilt $T_x M = \ker df(x)$.

$\lceil$ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma : \Omega \to M$ eine Einbettung mit $x \in \gamma(\Omega)$. Sei $p = \gamma^{-1}(x)$. Dann $f \circ \gamma = b$ und somit insbesondere $df(x) \circ d\gamma(p) = 0$. Aber das Bild $d\gamma(p)\mathbb{R}^n$ hat bereits Dimension n und ist somit gleich dem Kern von $df(x)$. (Warum?) $\rfloor$?

(2) Sei $M := S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre von Radius 1. Für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $|x| = 1$ gilt, dass

$$T_x M \;=\; \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, (v, x) = 0 \} \,.$$

(Warum? *Hinweis:* Benutzen Sie Teil 1 und $f(x) = (x, x)$.) ?

Definition 14.4.7. Eine *Differentialform von Grad k auf M*, oder kurz *k-Form*, ist eine Familie $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$, wobei $\omega_x \in \mathrm{Alt}^k(T_x M)$. Wir schreiben

$$\mathcal{A}^k(M)$$

für die Menge der k-Formen auf M.

Bemerkung 14.4.8.

(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\eta \in \mathcal{A}^k(U)$. Angenommen, die Untermannigfaltigkeit M ist in U enthalten. Für $x \in M$ und $v_1, \ldots, v_k \in T_x M$ definiert

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_k) \;:=\; \eta_x(v_1, \ldots, v_k)$$

eine k-Form auf M. Wir schreiben $\omega = \eta|_M$.

(2) Sei $(\gamma_\alpha : \Omega_\alpha \to M)_{\alpha \in A}$ ein Atlas aus Einbettungen für M. Dann ist $\omega^\alpha := \gamma_\alpha^* \omega$ eine k-Form auf Ω_α. Explizit, für $p \in \Omega_\alpha$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$,

$$\omega_p^\alpha(a_1, \ldots, a_k) \;=\; \omega_{\gamma_\alpha(p)}(d\gamma_\alpha(p)a_1, \ldots, d\gamma_\alpha(p)a_k)$$

Falls p im (Urbild vom) Schnitt von zwei Karten liegt, $p \in \Omega_{\alpha\beta}$, so folgt aus $\gamma_\beta \circ T_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha|_{\Omega_{\alpha\beta}}$, dass

$$\omega^\alpha \;=\; T_{\alpha\beta}^* \omega^\beta \quad \text{auf} \quad \Omega_{\alpha\beta} \,.$$

(Details?) ?

(3) Wir nennen eine k-Form $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ stetig / differenzierbar / von Klasse $\mathcal{C}^p$ auf M, falls alle ω_α diese Eigenschaft haben. Wegen Teil 2 ist dies unabhängig vom gewählten Atlas aus Einbettungen. (Warum?) ?

Lemma 14.4.9. (Heftungslemma)
Sei $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Atlas aus Einbettungen für M. Sei $(\omega^\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von k-Formen $\omega^\alpha \in \mathcal{A}^k(\Omega_\alpha)$. Angenommen, für alle $\alpha, \beta \in A$ gilt

$$\omega^\alpha \;=\; T^*_{\alpha\beta}\,\omega^\beta \quad \text{auf} \quad \Omega_{\alpha\beta}\ . \tag{$*$}$$

Dann gibt es genau eine k-Form ω auf M mit $\omega^\alpha = \gamma_\alpha^*\omega$ für alle $\alpha \in A$.

Beweis. Sei $x \in M$. Wähle ein $\alpha \in A$, sodass $x \in \gamma_\alpha(\Omega_\alpha)$. Sei $p = \gamma_\alpha^{-1}(x)$. Per Konstruktion ist $A := d\gamma_\alpha(p) : \mathbb{R}^n \to T_xM$ eine lineare Bijektion. Für $v_1, \ldots, v_k \in T_xM$ definiere

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_k) \;:=\; \omega_p^\alpha(A^{-1}v_1, \ldots, A^{-1}v_k)\ .$$

Dann $\omega_x \in \mathrm{Alt}^k(T_xM)$ und nach $(*)$ ist ω_x unabhängig von der Wahl von $\alpha \in A$. (Warum? *Hinweis:* Sei $q = \gamma_\beta^{-1}(x)$. Aus der Definition von $T_{\alpha\beta}$ folgt $d\gamma_\beta(q) \circ dT_{\alpha\beta}(p) = d\gamma_\alpha(p)$. Dies kann man geeignet umstellen und einsetzen, nachdem man $(*)$ explizit ausgeschrieben hat.) ?

Das so konstruierte ω erfüllt $\omega^\alpha = \gamma_\alpha^*\omega$ für alle $\alpha \in A$ und ist damit eindeutig. (Warum?) □ ?

■ Sei $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ differenzierbar und sei $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Atlas aus Einbettungen für M. Setze $\rho^\alpha := d(\gamma_\alpha^*\omega)$.

Beh.: $(\rho^\alpha)_{\alpha\in A}$ erfüllt die Voraussetzung des Heftungslemmas (Lemma 14.4.9).

⌈ Wir müssen zeigen, dass für alle $\alpha, \beta \in A$ auf $\Omega_{\alpha\beta}$ gilt: $\rho^\alpha \;=\; T^*_{\alpha\beta}\,\rho^\beta$.
Dies folgt aus Satz 14.2.8:

$$T^*_{\alpha\beta}\,\rho^\beta \;=\; T^*_{\alpha\beta}\,d(\gamma_\beta^*\omega) \;=\; d(T^*_{\alpha\beta}\gamma_\beta^*\omega) \;\overset{(*)}{=}\; d(\gamma_\alpha^*\omega) \;=\; \rho^\alpha\ ,$$

wobei wir in $(*)$ benutzt haben, dass $\gamma_\beta \circ T_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha|_{\Omega_{\alpha\beta}}$. ⌋

Definition 14.4.10. Sei $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ differenzierbar.

(i) Die durch die obige Behauptung und das Heftungslemma eindeutig bestimmte $(k+1)$-Form auf M nennen wir die *äußere Ableitung von ω* und schreiben $d\omega$. (Also per Konstruktion $\gamma_\alpha^*(d\omega) = d(\gamma_\alpha^*\omega)$.)

(ii) Eine differenzierbare k-Form ω auf M heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$. Eine k-Form ω auf M heißt *exakt*, falls $\omega = d\eta$ für eine differenzierbare $(k-1)$-Form η auf M.

Bemerkung 14.4.11.

(1) Wie in Bemerkung 14.2.2 (4) ist das Dachprodukt von Formen auf M. punktweise definiert.

(2) Die Eigenschaften (i)–(iii) der äußeren Ableitung aus Satz 14.2.7 gelten analog für Differentialformen auf M. Zum Beispiel:

Beh.: Ist ω eine $\mathcal{C}^2$-k-Form auf M, so gilt $d(d\omega) = 0$.

⌈ Sei $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas aus Einbettungen für M. Es genügt, zu zeigen, dass für alle $\alpha \in A$ gilt: $d(d\omega^\alpha) = 0$ mit $\omega^\alpha = \gamma_\alpha^* \omega \in \mathcal{A}^k(\Omega_\alpha)$. Dies ist aber gerade die Aussage von Satz 14.2.7 (iii). ⌋

(Wieso gelten (i) und (ii)?) ?

14.5 Integration von n-Formen und Orientierung

Definition 14.5.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \mathcal{A}^n(\Omega)$ (also $f : \Omega \to \mathbb{R}$).

(i) Die n-Form ω heißt *integrierbar über* Ω (bzw. *messbar* / *das Integral von* ω *existiert*), falls f über Ω Lebesgue-integrierbar ist (bzw. messbar ist / das Integral von f existiert).

(ii) Existiert das Integral von ω, so nennen wir

$$\int_\Omega \omega \ := \ \int_\Omega f\, d\lambda_n$$

das *Integral von* ω. Wir schreiben auch

$$\int_\Omega |\omega| \ := \ \int_\Omega |f|\, d\lambda_n \ .$$

■ Für Integrale über allgemeine messbare Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stellen wir uns ω und f entsprechend durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt vor und betrachten das Lebesgue-Integral über $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 14.5.2. Mit $\Omega = [0,1]^{\times 2} \subset \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_\Omega dx_1 \wedge dx_2 = 1 \ , \quad \int_\Omega dx_2 \wedge dx_1 = -1 \ , \quad \int_\Omega |dx_2 \wedge dx_1| = 1 \ .$$

■ In Satz 13.2.8 hatten wir gesehen, dass die Spur M einer Einbettung eine Untermannigfaltigkeit ist.

Definition 14.5.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Einbettung mit Spur M. Sei ω eine n-Form auf M . Dann heißt ω *bezüglich γ integrierbar*, falls $\gamma^*\omega$ auf Ω integrierbar ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\int^\gamma \omega \ := \int_\Omega \gamma^*\omega \quad , \quad \int^\gamma |\omega| \ := \int_\Omega |\gamma^*\omega| \ .$$

■ Für Messbarkeit und für die Existenz des Integrals ist die Definition analog, das führen wir ab hier und im Rest des Kapitels nicht mehr getrennt auf.

Lemma 14.5.4. Für $i = 1, 2$ seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^d$ Einbettungen, beide mit gleicher Spur M. Sei ω eine n-Form auf M, die bezüglich γ_1 integrierbar ist.

(i) ω ist auch bezüglich γ_2 integrierbar, und es gilt

$$\int^{\gamma_1} |\omega| \ = \int^{\gamma_2} |\omega| \ .$$

(ii) Setze $T := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ (dies ist ein Diffeomorphismus nach Satz 13.2.9). Falls $\det dT(x) > 0$ für alle $x \in \Omega_1$, so gilt

$$\int^{\gamma_1} \omega \ = \int^{\gamma_2} \omega \ .$$

Beweis. Nach Lemma 14.2.3 gilt

$$\gamma_i^*\omega = f_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

für eine Funktion $f_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$. Aus $\gamma_1^*\omega = T^*(\gamma_2^*\omega)$ folgt mit Bemerkung 14.2.5 (Details?): ?

$$f_1 \ = \ f_2 \circ T \cdot \det(dT) \quad : \ \Omega_1 \to \mathbb{R} \ . \tag{$*$}$$

Aus dem Transformationssatz 12.3.1 (und Bemerkung 12.3.2 (2)) folgt, dass f_1 genau dann über Ω_1 integrierbar ist, wenn f_2 über Ω_2 integrierbar ist (Warum? *Hinweis:* Erstmal wissen wir nur, dass $f_2 \circ T \cdot |\det(dT)|$ integrierbar ist. Warum ist dann auch $f_2 \circ T \cdot \det(dT)$ (also f_1) messbar? Fällt Ihnen eine Abschätzung ein, die die Integrierbarkeit zeigt?) Der Transformationssatz sagt weiter, dass in diesem Fall gilt: ?

$$\int_{\Omega_1} f_2(T(x)) \cdot |\det(dT(x))| \, dx \ = \int_{\Omega_2} f_2(y) \, dy \ . \tag{$**$}$$

Wenden wir dieses Ergebnis auf $|f_1| = |f_2 \circ T| \cdot |\det(dT)|$ an, so folgt Teil (i).

Für Teil (ii) rechnen wir nach:

$$\int^{\gamma_1} \omega \; = \; \int_{\Omega_1} \gamma_1^* \omega \; = \; \int_{\Omega_1} f_1(x)\, dx \; \overset{(*)}{=} \; \int_{\Omega_1} f_2(T(x)) \cdot \det(dT(x))\, dx \; .$$

Falls nun $\det(dT(x)) > 0$ für alle $x \in \Omega_1$, so können wir den Transformationssatz anwenden, und erhalten weiter

$$\cdots \overset{(**)}{=} \int_{\Omega_2} f_2(y)\, dy \; = \; \int^{\gamma_2} \omega \; .$$

□

Definition 14.5.5. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(i) Sei $n \geq 1$. Eine *geordnete Basis von* V ist ein Element B aus $V^{\times n}$, also $B = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $b_i \in V$, so dass $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V bildet.

(ii) Sei $n \geq 1$. Zwei geordnete Basen $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ von V sind *gleichorientiert*, falls die lineare Abbildung $T : V \to V$, $T(a_i) = b_i$, die Bedingung $\det T > 0$ erfüllt. (Dies definiert eine Äquivalenzrelation.)

(iii) Falls $n \geq 1$: Eine *Orientierung auf* V ist eine Äquivalenzklasse geordneter Basen von V (bezüglich der in (ii) definierten Relation). Wir schreiben $[a_1, \ldots, a_n]$ für die Äquivalenzklasse von $(a_1, \ldots, a_n)$.

   Falls $n = 0$: Eine *Orientierung auf* V ein Element aus $\{\pm 1\}$.

(iv) Sei U ein weiterer n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $T : U \to V$ eine invertierbare lineare Abbildung.

   Falls $n \geq 1$: Sei $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ eine Orientierung auf U und $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$ eine Orientierung auf V. Dann heißt T *orientierungstreu*, falls $T\alpha = \beta$, wobei $T\alpha := [Ta_1, \ldots, Ta_n]$.

   Falls $n = 0$: (Hier ist T automatisch Null.) Seien $\varepsilon_U, \varepsilon_V \in \{\pm 1\}$ Orientierungen für U, V. Wir nennen T *orientierungstreu*, falls $\varepsilon_U = \varepsilon_V$.

(v) Für $n \geq 1$ heißt $[e_1, \ldots, e_n]$ die *Standardorientierung auf* $\mathbb{R}^n$. Für $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist die Standardorientierung „+“.

Bemerkung 14.5.6. Ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum hat genau zwei Orientierungen: für zwei geordnete Basen $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ von V, und $T : V \to V$, $T(a_i) = b_i$ wie in der Definition, gilt entweder $\det T > 0$ oder $\det T < 0$. Also gilt entweder $(b_1, \ldots, b_n) \in [a_1, \ldots, a_n]$ oder $(b_1, \ldots, b_n) \in [-a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Beispiel 14.5.7. Betrachte $V = \mathbb{R}^2$. Die zwei möglichen Orientierungen sind $[e_1, e_2]$ (die Standardorientierung des $\mathbb{R}^2$) und $[e_2, e_1]$ (die andere Orientierung). Sei $a_1 = (1, 0)$ und $a_2 = (1, 1)$. Dann $(a_1, a_2) = [e_1, e_2]$. Sei $b_1 = (0, 1)$ und $b_2 = (1, 1)$. Dann $(b_1, b_2) \in [e_2, e_1]$. (Warum?) ?

Lemma 14.5.8. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $\omega, \omega' \in \mathrm{Alt}^n(V)$ mit $\omega, \omega' \neq 0$. Dann:

(i) Falls $n \geq 1$: $\alpha(\omega) := \{ (a_1, \dots, a_n) \in V^{\times n} \,|\, \omega(a_1, \dots, a_n) > 0 \}$ ist eine Orientierung von V.

Falls $n = 0$: $\alpha(\omega) = \mathrm{sgn}(\omega)$ ist eine Orientierung von V. ($\omega \in \mathbb{R}$ in diesem Fall, und $\mathrm{sgn}(\omega) \in \{\pm 1\}$ ist das Vorzeichen.)

(ii) $\alpha(\omega) = \alpha(\omega')$ genau dann, wenn $\omega = c\omega'$ für ein $c > 0$.

Beweis. Im Fall $n = 0$ ist in Teil (i) nichts zu tun, und Teil (ii) ist klar. Sei also ab nun $n \geq 1$.

Sei $(a_1, \dots, a_n)$ eine geordnete Basis von V. Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die duale Basis. Da $\dim \mathrm{Alt}^n(V) = 1$ gibt es $u, u' \in \mathbb{R}$, so dass $\omega = u\, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ und $\omega' = u'\, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. Da $\omega, \omega' \neq 0$ gilt auch $u, u' \neq 0$.

(i) Sei $(b_1, \dots, b_n)$ eine geordnetes Tupel von Vektoren aus V. Nach Satz 14.1.3 gilt $\omega(b_1, \dots, b_n) = u \det(\varphi_i(b_j))$. Falls $\omega(b_1, \dots, b_n) > 0$ sind die b_i also linear unabhängig und somit eine Basis. Da $(\varphi_i(b_j))_{i,j}$ die Matrix der Abbildung $T(a_j) = b_j$ in der Basis $(a_1, \dots, a_n)$ ist (Warum?), gilt ? $\omega(b_1, \dots, b_n) > 0$ genau dann, wenn $u \det T > 0$, also genau dann, wenn $(b_1, \dots, b_n) \in [u\, a_1, a_2, \dots, a_n]$.

(ii) Da u, u' beide nicht Null sind, gilt entweder $c = u/u' > 0$ oder $c = u/u' < 0$. Für $u/u' > 0$ ist $\omega(a_1, \dots, a_n) > 0 \Leftrightarrow \omega'(a_1, \dots, a_n) > 0$, so dass $\alpha(\omega) = \alpha(\omega')$, und für $u/u' < 0$ ist $\omega(a_1, \dots, a_n) > 0 \Leftrightarrow \omega'(a_1, \dots, a_n) < 0$, so dass $\alpha(\omega) \cap \alpha(\omega') = \emptyset$.

$\square$

Bemerkung 14.5.9. Man kann eine Orientierung auf V also auch als eine Äquivalenzklasse von nicht-verschwindenden n-Formen auf V verstehen, wobei $\omega \sim \omega'$, falls $\omega = c\omega'$ für ein $c > 0$. Diese Charakterisierung stimmt auch für $n = 0$ (da $\mathrm{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$ gilt, auch für $\dim(V) = 0$), während man bei geordneten Basen den Fall $n = 0$ getrennt behandeln muss.

Definition 14.5.10. Sei M eine n-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$.

(i) Eine *Orientierung auf* M ist eine Orientierung von T_xM für jedes $x \in M$. Falls $n \geq 1$, so fordern wir überdies:

Für alle $x \in M$ gibt es eine Einbettung $\gamma : \Omega \to M$ mit $x \in \gamma(\Omega)$, sodass $d\gamma(p) : \mathbb{R}^n \to T_{\gamma(p)}M$ für alle $p \in \Omega$ orientierungstreu ist (hier ist $\mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung versehen).

(ii) Eine Einbettung $\gamma : \Omega \to M$ heißt *orientierungstreu*, falls der lineare Isomorphismus $d\gamma(p) : \mathbb{R}^n \to T_{\gamma(u)}M \subset \mathbb{R}^d$ für alle $p \in \Omega$ orientierungstreu ist (hier ist $\mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung versehen).

(iii) Eine Untermannigfaltigkeit, die mit einer Orientierung ausgestattet ist, heißt *orientiert*. Ein Atlas aus orientierungstreuen Einbettungen heißt *orientiert*.

■ Angenommen $n = 0$. Da M eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, besteht sie nur aus isolierten Punkten. Eine *Orientierung auf* M ist dann eine Funktion $M \to \{\pm 1\}$ ohne weitere Eigenschaften.

Lemma 14.5.11. Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, und sei ω eine stetige n-Form auf M mit $\omega_x \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann definiert ω eine Orientierung auf M, indem man punktweise Lemma 14.5.8 anwendet.

Beweis. Für $n = 0$ ist nichts zu tun. Sei $n > 0$ und $x \in M$. Wähle eine Einbettung $\gamma : \Omega \to M$ mit x in der Spur. Sei $p = \gamma^{-1}(x)$. Schreibe $\gamma^*\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Falls $f(p) < 0$ wähle statt dessen $\tilde{\gamma}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \gamma(-x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dann $\tilde{f}(\tilde{p}) > 0$ für $\tilde{p} = \tilde{\gamma}^{-1}(x)$.

Sei also o.B.d.A. $\gamma^*\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ mit $f(p) > 0$. Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung $\Omega' \subset \Omega$ von p, sodass $f > 0$ auf Ω'.

Beh.: Die Einbettung $\gamma|_{\Omega'} : \Omega' \to M$ ist orientierungstreu.

⌈ Sei $q \in \Omega'$ beliebig und $y = \gamma(q)$. Sei $a_i = d\gamma(q)e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Per Konstruktion ist $a_i \in T_yM$. Wir müssen zeigen, dass $(a_1, \ldots, a_n) \in \alpha(\omega_y)$ im Sinne von Lemma 14.5.8, also dass $\omega_y(a_1, \ldots, a_n) > 0$:

$$\begin{aligned} \omega_y(a_1, \ldots, a_n) &= \omega_{\gamma(q)}(d\gamma(q)e_1, \ldots, d\gamma(q)e_n) \\ &= (\gamma^*\omega)_q(e_1, \ldots, e_n) \\ &= f(q)\,(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(e_1, \ldots, e_n) \\ &= f(q) > 0\,. \end{aligned}$$

⌋ □

Lemma 14.5.12. Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, $n \geq 1$, und sei $\mathcal{A} = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas aus Einbettungen.

(i) Falls M und $\mathcal{A}$ orientiert sind, so gilt $\det dT_{\alpha\beta} > 0$ für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

(ii) Falls $\det dT_{\alpha\beta} > 0$ für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, so gibt es eine eindeutige Orientierung auf M, bezüglich der $\mathcal{A}$ orientiert ist.

Beweis.

(i) Sei $x \in U_{\alpha\beta}$ beliebig, und $p = \gamma_\alpha^{-1}(x)$, $q = \gamma_\beta^{-1}(x)$. Sei $A := d\gamma_\alpha(p) : \mathbb{R}^n \to T_xM$ und $B := d\gamma_\beta(q) : \mathbb{R}^n \to T_xM$. Per Annahme sind A, B invertierbar und orientierungstreu. Dann ist aber auch $dT_{\alpha\beta}(p) = B^{-1}A$ orientierungstreu. Somit $\det dT_{\alpha\beta}(p) > 0$ (Waurm?). ?

(ii) Für $x \in M$ und γ_α mit $x \in \gamma_\alpha(\Omega_\alpha)$ definiere die Orientierung von T_xM via $[d\gamma(p)e_1, \ldots, d\gamma(p)e_n]$ für $p = \gamma_\alpha^{-1}(x)$ (Transport der Standardorientierung). Dies ist unabhängig von der Wahl von α und definiert eine Orientierung auf M. (Details?) ?

Eindeutigkeit ist klar (wäre die Orientierung von T_xM anders, dann wäre γ_α nicht orientierungstreu und damit der Atlas nicht orientiert). $\square$

Bemerkung 14.5.13. Sei M eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit.

(1) Sei $n \geq 1$ und ω eine n-Form auf M. Seien $\gamma_i : \Omega_i \to M$ orientierungstreue Einbettungen ($i = 1, 2$). Nach Lemma 14.5.4 (ii) gilt $\int^{\gamma_1} \omega = \int^{\gamma_2} \omega$.

(2) Sei weiterhin $n \geq 1$. Falls $\mathrm{Supp}(\omega) \subset \gamma(\Omega)$ für eine orientierungstreue Einbettung $\gamma : \Omega \to M$, so definieren wir

$$\int_M \omega := \int^\gamma \omega \ .$$

Nach (1) ist dies unabhängig von der Wahl von γ.

(3) Im Fall $1 \leq n = d$ haben wir folgende Aussage: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und mit der Standardorientierung von $\mathbb{R}^n$ ausgestattet. Sei $\omega \in \mathcal{A}^n(V)$ über V integrierbar und $\phi : U \to V$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\int_U \phi^*\omega \ = \ \int_V \omega \ .$$

(Warum? *Hinweis:* Siehe den Beweis von Lemma 14.5.4.) ?

(4) Im Fall $n = 0$ ist eine Orientierung von M eine Funktion $\varepsilon : M \to \{\pm 1\}$. Sei $\omega \in \mathcal{A}^0(M)$, also $\omega : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist ω integrierbar, falls $\sum_{p\in M} |\omega(p)|$ endlich ist, und wir setzen in diesem Fall

$$\int_M \omega \;:=\; \sum_{p\in M} \varepsilon(p)\,\omega(p)\ .$$

Definition und Satz 14.5.14. Sei M eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^d$ mit $n \geq 1$, und sei ω eine n-Form auf M.

(i) Wir nennen ω *integrierbar über M*, falls gilt: Es gibt einen orientierten Atlas $\mathcal{A}$ und eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass

- $\varepsilon_i\omega$ auf M integrierbar ist für alle $i \in \mathbb{N}$ (im Sinne von Bemerkung 14.5.13 (2)), und
- $\sum_{i=1}^{\infty} \int_M |\varepsilon_i\omega| < \infty$.

In diesem Fall heißt

$$\int_M \omega \;:=\; \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varepsilon_i\,\omega$$

das *Integral von ω über die orientierte Untermannigfaltigkeit M*.

(ii) Gilt (i) für eine Wahl von $\mathcal{A}$ und $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so gilt (i) für jede solche Wahl, und $\int_M \omega$ ist unabhängig von der Wahl.

Der Beweis (von Teil (ii)) ist analog zu dem von Satz 13.6.3 und wir führen ihn hier nicht aus.

Satz 14.5.15. Sei M eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^d$, und sei ω eine n-Form auf M.

(i) Ist $A \subset M$ kompakt und ω stetig auf A, so ist ω auf A integrierbar.

(ii) Ist $X \subset M$ eine n-Nullmenge, und ist ω integrierbar auf $M \setminus X$, so ist ω auch auf M integrierbar, und es gilt

$$\int_M \omega \;=\; \int_{M\setminus X} \omega\ .$$

Der Beweis ist analog zu dem von Satz 13.6.7 und Satz 13.6.8.

14.6 Der Satz von Stokes

■ Sei $n \geq 1$. Der *Halbraum* $H^n \subset \mathbb{R}^n$ ist die Teilmenge

$$H^n \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \leq 0\,\} \ .$$

■ Sei X ein metrischer Raum und $G \subset X$ eine Teilmenge von X. Der *Rand ∂G von G in X* ist definiert als der Abschluss von G ohne das Innere von G,

$$\partial G \ := \ \overline{G} \setminus \mathring{G} \ .$$

Insbesondere ist ∂G selber abgeschlossen in X. Der Rand ∂G besteht aus allen $x \in X$ mit folgender Eigenschaft:

> Für jede offene Umgebung U von x in X gibt es Punkte $a, b \in U$, sodass $a \in G$ und $b \notin G$.

(Warum ist das eine Beschreibung von ∂G?) ?

Beispiel 14.6.1. Hier ein paar Beispiele für $G \subset X$ und ∂G:

- $X = \mathbb{R}$, $G = [0, 1]$. Dann $\partial G = \{0, 1\}$.
- $X = \mathbb{R}$, $G = (0, 1)$. Dann $\partial G = \{0, 1\}$.
- $X = \mathbb{R}^2$, $G = [0, 1] \times \{0\}$. Dann $\partial G = [0, 1] \times \{0\}$.

Für den Halbraum $H^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, gilt: $\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 = 0\}$.

Bemerkung 14.6.2.

(1) Sei $n \geq 2$. Der Rand ∂H^n ist eine $n-1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Betrachte die Einbettung

$$\tilde{\imath} : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial H^n \quad , \quad (u_1, \ldots, u_{n-1}) \ \mapsto \ (0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \ .$$

Wir definieren eine Orientierung von ∂H^n, indem wir verlangen, dass $\tilde{\imath}$ orientierungstreu ist (Lemma 14.5.12, wobei der Atlas aus der einen Einbettung $\tilde{\imath}$ besteht). Zwei weitere Beschreibungen der Orientierung von ∂H^n sind:

- Via Definition 14.5.10: Für alle $y \in \partial H^n$ ist der Tangentialraum gerade wieder durch ∂H^n gegeben: $T_y(\partial H^n) = \partial H^n$. Für jedes $T_y(\partial H^n)$ wähle die Orientierung $[e_2, e_3, \ldots, e_n]$.
- Via Lemma 14.5.11: Betrachte die $n-1$ Form $\eta = dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ auf $\mathbb{R}^n$. Die Einschränkung $\eta|_{\partial H^n}$ ist eine stetige, nirgendwo verschwindende $n-1$ Form auf ∂H^n und definiert daher eine Orientierung.

(Warum stimmen diese drei Beschriebungen der Orientierung überein?) ?

(2) Sei $n = 1$. Dann $H^1 = \mathbb{R}_{\leq 0}$ und $\partial H^1 = \{0\}$. Wir wählen die Orientierung „+1“ für ∂H^1. Dann ist $\tilde{\imath} : \mathbb{R}^0 \to \partial H^1$ wieder orientierungstreu.

In diesem Fall brauchen wir später aber beide Halbräume. Wir setzen daher

$$H^1_- := H^1 = \mathbb{R}_{\leq 0} \quad , \quad H^1_+ := \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für den Rand setzen wir die Orientierungen wie folgt fest: ∂H^1_- hat Orientierung „+1“ wie oben, und ∂H^1_+ hat Orientierung „−1“.

Lemma 14.6.3. Sei $n \geq 1$ und sei ω eine $\mathcal{C}^1$-$(n-1)$-Form auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega \;=\; 0$,

(ii) falls $n \geq 2$: $\int_{H^n} d\omega \;=\; \int_{\partial H^n} \omega|_{\partial H^n}$,

falls $n = 1$: $\int_{H^1_\mp} d\omega \;=\; \pm\omega(0)$.

Beweis. Nach Lemma 14.2.3 gibt es $\mathcal{C}^1$-Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, sodass

$$\omega \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \; .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega \;&=\; \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \\ &=\; \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j f_i \cdot dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \\ &=\; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i \, (-1)^{i-1}}_{=:g} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \; . \end{aligned}$$

Nach Definition 14.5.1 ist das Integral der n-Form $d\omega$ durch das Lebesgue-Integral der Koeffizientenfunktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Per Annahme ist g stetig und hat kompakten Träger, ist somit integrierbar. Wir berechnen $\int g$ komponentenweise. Sei $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = H^n$ (bzw. $X = H^1_\pm$ im Fall $n = 1$)

$$\int_X \omega \;=\; \int_X g \, d\lambda_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_X \partial_i f_i(x) \, d(x_1, \ldots, x_n) \; .$$

Um die Integrale in den einzelnen Summanden zu berechnen, benutzen wir den Satz von Fubini (Satz 12.2.1) (Warum dürfen wir den Satz jeweils anwenden?) Wir integrieren zuerst $\partial_i f_i$ bezüglich x_i. Für $i \geq 2$: ?

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i f_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i \;&=\; \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \partial_i f_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i \\ = \lim_{L\to\infty} \Big(f_i(x_1, \ldots, L, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, -L, \ldots, x_n) \Big) \;&=\; 0\ . \end{aligned}$$

Hier wird $\pm L$ im i-ten Argument eingestzt. Der Grenzwert ist Null, da f_i kompakten Träger hat.

Ab jetzt unterscheiden wir die beiden Fälle für X:

- $X = \mathbb{R}^n$: Die obige Rechnung gilt auch für $i = 1$, und nach Aufspalten des Integrals über $\mathbb{R}^n$ mittels Fubini erhalten wir insgesamt $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$. Das zeigt Teil (i) des Lemmas.

- $X = H^n$: Sei $n \geq 2$. Für $i = 1$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \partial_1 f_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \;&=\; \lim_{L\to\infty} \Big(f_1(0, x_2, \ldots, x_n) - f_1(-L, x_2, \ldots, x_n) \Big) \\ &=\; f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\ . \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\int_{H^n} d\omega \;=\; \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, d(x_2, \ldots, x_n)\ .$$

Um $\int_{\partial H^n} \omega$ zu berechnen brauchen wir nach Definition 14.5.3 und Bemerkung 14.5.13 die zurückgezogene Form $\tilde{\iota}^* \omega$. Mit Bemerkung 14.2.5 (4) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}^* \omega \;&=\; \sum_{i=1}^{n} f_i \circ \tilde{\iota} \cdot d\tilde{\iota}_1 \wedge \cdots \widehat{d\tilde{\iota}_i} \cdots \wedge d\tilde{\iota}_n\ . \\ &=\; f_1 \circ \tilde{\iota} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}\ . \end{aligned}$$

(Warum ist die Summe weg?) Insgesamt ergibt sich ?

$$\begin{aligned} \int_{\partial H^n} \omega|_{\partial H^n} \;&=\; \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{\iota}^* \omega \;=\; \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, d(x_2, \ldots, x_n) \\ &=\; \int_{H^n} d\omega\ . \end{aligned}$$

Der Fall $n = 1$ mit $H^1_\pm$ kann direkt mit dem Fundamentalsatz der Integral– und Differentialrechnung nachgeprüft werden.

$\square$

Definition 14.6.4. Sei $n \geq 1$ und sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^p$. Eine Teilmenge $G \subset M$ heißt *glatt berandet*, wenn es für jeden Punkt $x \in \partial G$ (hier wird der Rand in M genommen, nicht in $\mathbb{R}^d$) eine Einbettung $\gamma : \Omega \to M$ der Klasse $\mathcal{C}^p$ gibt, sodass gilt: $x \in W$ für $W := \gamma(\Omega)$, und

- falls $n \geq 2$: $\gamma(H^n \cap \Omega) = G \cap W$,
- falls $n = 1$: Für $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ gilt $\gamma(H^1_\varepsilon \cap \Omega) = G \cap W$.

Wir nennen ein solches γ eine *G-angepasste Einbettung.*

Bemerkung 14.6.5.

(1) Mit der Notation aus Definition 14.6.4:

Beh.: $\gamma(\partial H^n \cap \Omega) = \partial G \cap W$ (bzw. $\partial H^1_\pm$ für $n = 1$).

⌈ Sei $n \geq 2$.
Wir zeigen beide Inklusionen. Sei $p \in \partial H^n \cap \Omega$ und $x := \gamma(p) \in M$. Sei U eine beliebige offene Umgebung von x in M. Dann ist $V := \gamma^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von p in Ω. Daher gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $a := p - \varepsilon e_1$ und $b = p + \varepsilon e_1$ in V sind. Aber $a \in H^n$ und $b \notin H^n$. Dann auch $\gamma(a), \gamma(b) \in U$, und wegen $\gamma(H^n \cap \Omega) = G \cap W$ gilt ferner $\gamma(a) \in G$, $\gamma(b) \notin G$. Also $x \in \partial G$ und damit $\gamma(\partial H^n \cap \Omega) \subset \partial G \cap W$.
Für $\gamma(\partial H^n \cap \Omega) \supset \partial G \cap W$ wendet man das obige Argument auf die Umkehrabbildung $\gamma^{-1} : W \to \Omega$ an, die ebenfalls stetig ist (γ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild).
Den Fall $n = 1$ behandelt man analog. ⌋

Aus der Behauptung oben folgt auch, dass jedes $x \in \partial G$ auch schon in G ist (Warum?). In anderen Worten, G ist eine abgeschlossene Teilmenge von M. ?

(2) Für $n \geq 2$ gibt es einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, der H^n und ∂H_n jeweils auf sich selbst abbildet:

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, -x_2, \ldots, x_n) .$$

Im Fall $n = 1$ fehlt uns die Richtung x_2, und wir müssen x_1 nach $-x_1$ schicken. Dies bildet aber H^1_+ auf H^1_- ab, und umgekehrt. Das ist der Grund für die Ausnahme bei $n = 1$ in Definition 14.6.4.

Zum Beispiel: Sei $G = [a, b] \subset \mathbb{R}$, und sei $s = b-a > 0$. Setze $\Omega = (-s, s)$. Dann sind $\gamma_- : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + b$ und $\gamma_+ : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + a$ G-angepasste orientierungstreue Einbettungen. Für γ_+ gilt $\gamma_+(H^1_+ \cap \Omega) = G \cap \gamma_+(\Omega)$.

Die Einbettung $\tilde{\gamma}_+ : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a - x$ erfüllt $\tilde{\gamma}_+(H^1_- \cap \Omega) = G \cap \tilde{\gamma}_+(\Omega)$, ist aber nicht orientierungstreu.

(3) Die Beobachtung in (2) benutzt man, um die folgende Behauptung zu zeigen:

Beh.: Seien M, G wie in Definition 14.6.4. Ist M orientiert, so können die G-angepassten Einbettungen orientierungstreu gewählt werden.

(Details?) ?

Satz 14.6.6. Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $n \geq 1$, und sei $G \subset M$ eine glatt berandete Menge.

(i) Falls $\partial G \neq \emptyset$, so ist ∂G eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$.

(ii) Ist M orientiert, so induziert die Orientierung von M eine Orientierung auf ∂G.

Beweis.

(i) Nach Satz 13.2.8 genügt es, einen Atlas aus Einbettungen für ∂G zu finden.

Sei $x \in \partial G$. Per Definition gibt es eine G angepasste Einbettung $\gamma_x : \Omega_x \to M$ mit $x \in \gamma_x(\Omega_x)$. Setze $\tilde{\Omega}_x := \tilde{\imath}^{-1}(\Omega_x) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist auch die Komposition $\tilde{\gamma}_x := \gamma_x \circ \tilde{\imath} : \tilde{\Omega}_x \to M$ eine Einbettung. Nach Bemerkung 14.6.5 (1) ist die Spur von $\tilde{\gamma}_x$ in ∂G und somit auch $x \in \tilde{\gamma}_x(\tilde{\Omega}_x)$.

Insgesamt bilden die $(\tilde{\gamma}_x)_{x \in \partial G}$ einen Atlas aus Einbettungen.

(ii) Nach Bemerkung 14.6.5 (3) können wir annehmen, dass alle γ_x, die wir in Teil (i) verwendet haben, orientierungstreu sind.

- Falls $n = 1$: Es gilt $\gamma_x^{-1}(G) = \Omega_x \cap H^1_\varepsilon$ für ein $\varepsilon = \pm$. Das Vorzeichen ε ist unabhängig von der Wahl der orientierungstreuen Einbettung γ_x (Warum? *Hinweis:* Angenommen, es gäbe eine ρ_x mit $\gamma_x^{-1}(G) = \Omega_x \cap H^1_{-\varepsilon}$, welches Vorzeichen hat der Kartenwechsel im Punkt $0 \in H^1_+ \cap H^1_-$?). Wir definieren die Orientierung von x als $-\varepsilon$. ?

- Falls $n \geq 2$, so definieren wir eine Orientierung von ∂G mittels Lemma 14.5.12:

Seien $x, y \in \partial G$, sodass $U_{xy} = \tilde{\gamma}_x(\tilde{\Omega}_x) \cap \tilde{\gamma}_y(\tilde{\Omega}_y) \neq \emptyset$, und wie in Bemerkung 14.4.2 (2) sei

$$\tilde{T}_{xy} : \tilde{\Omega}_{xy} \to \tilde{\Omega}_{yx}$$

der resultierende Diffeomorphismus.

Beh.: Für alle $p \in \tilde{\Omega}_{xy}$ gilt $\det d\tilde{T}_{xy}(p) > 0$.

⌈ Sei $T_{xy} : \Omega_{xy} \to \Omega_{yx}$ der entsprechende Kartenwechsel für die Einbettungen γ_x, γ_y. Per Annahme sind γ_x, γ_y orientierungstreu. Somit gilt $\det dT_{xy}(p) > 0$.

Es gilt $T_{xy}(H^n \cap \Omega_{xy}) = H^n \cap \Omega_{yx}$. Für $x \in \Omega_{xy}$ mit $x_1 \leq 0$ gilt also auch $(T_{xy}(x))_1 \leq 0$. Es folgt, dass für alle $p \in \partial H^n \cap \Omega_{xy}$,

$$\partial_1 (T_{xy})_1(p) \geq 0 \ . \qquad (*)$$

Da T_{xy} Punkte aus ∂H^n wieder auf ∂H^n abbildet, folgt ferner, dass $\partial_i (T_{xy})_1(p) = 0$ für $i = 2, \ldots, n$. Die Matrix von $dT_{xy}(p)$ hat somit die Form

$$[dT_{xy}(p)] \; = \; \left(\begin{array}{c|c} \partial_1 (T_{xy})_1(p) & \cdots \; 0 \; \cdots \\ \hline \vdots & \\ * & [d\tilde{T}_{xy}(p)] \\ \vdots & \end{array} \right) .$$

(Warum steht da die Matrix $[d\tilde{T}_{xy}(p)]$?) ?

Nun gilt $\det(dT_{xy}(p)) = \partial_1 (T_{xy})_1(p) \cdot \det(d\tilde{T}_{xy}(p))$, und wegen $(*)$ und $\det(dT_{xy}(p)) > 0$ gilt somit $\det(d\tilde{T}_{xy}(p)) > 0$. ⌋

Lemma 14.5.12 gibt uns nun eine eindeutige Orientierung auf ∂G, sodass der Atlas $(\tilde{\gamma}_x)_{x \in \partial G}$ orientierungstreu ist. □

Satz 14.6.7. (Satz von Stokes)
Sei $n \geq 1$ und $M \subset \mathbb{R}^d$ eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^2$. Sei $G \subset M$ glatt berandet und kompakt. Sei ω eine $\mathcal{C}^1$-$(n-1)$-Form auf M. Dann gilt

$$\int_G d\omega \; = \; \int_{\partial G} \omega \ .$$

■ Wir brauchen hier $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeiten, weil wir Lemma 14.6.3 auf nach $\mathbb{R}^n$ zurückgezogene Formen anwenden wollen. Da in der Definition der zurückgezogenen Form die Ableitung der Einbettung vorkommt, gilt: soll die zurückgezogene Form $\mathcal{C}^1$ sein, muss die Einbettung $\mathcal{C}^2$ sein. Für G bedeutet „glatt beradet“ dann entsprechend, dass die G-angepassten Einbettungen $\mathcal{C}^2$ sind.

Beweis. Sei $x \in G$ beliebig. Wähle eine orientierungstreue Einbettung $\gamma_x : \Omega_x \to M$, sodass x in der Spur $W_x = \gamma_x(\Omega_x)$ enthalten ist, und sodass gilt:

- falls $x \in \mathring{G}$, so ist $W_x \subset G$, und
- falls $x \in \partial G$, so ist γ_x eine G-angepasste Einbettung.

Die W_x bilden eine offene Überdeckung von G. Da G kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $W_{x_1}, \ldots, W_{x_m}$ von G. Zusammen mit der Menge $M \setminus G$ bildet dies eine offene Überdeckung $\mathcal{O}$ von M:

$$\mathcal{O} \;=\; \{W_{x_1}, \ldots, W_{x_m}, M \setminus G\}$$

Sei $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine glatte, lokal endliche und $\mathcal{O}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Die Nummerierung sei so gewählt, dass

$$\operatorname{supp}(\varepsilon_i) \subset W_{x_i} \;\text{ für }\; i = 1, \ldots, m \quad , \qquad \operatorname{supp}(\varepsilon_i) \subset M \setminus G \;\text{ für }\; i > m \;.$$

(Warum geht das? *Hinweis:* Dass man auf G nur endlich viele ε_i benötigt, folgt daraus, dass G kompakt ist (siehe den Beweis von Satz 13.5.2). Dass man pro W_{x_i} nur ein ε_i benötigt, ist erstmal falsch. Aber man kann nachträglich die x_i einfach mehrfach zählen, d.h. dass in x_i, $i = 1, \ldots, m$ ein Punkt mehrfach vorkommen kann. Dies ist nur ein Notations-Trick, um Doppelindizes wie in $\operatorname{supp}(\varepsilon_a) \subset W_{x_{i(a)}}$ zu vermeiden.) ?

Per Konstruktion gilt für jedes $x \in G$, dass $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i(x) = 1$ (auf G brauchen wir die ε_i mit $i > m$ nicht). Es folgt, dass auf G (aber nicht auf ganz M) gilt:

$$\omega \;=\; \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \omega \quad , \quad d\omega \;=\; \sum_{i=1}^{m} d(\varepsilon_i \omega) \;.$$

Für die äußere Ableitung gilt ebenfalls $\operatorname{supp}(d(\varepsilon_i\omega)) \subset W_{x_i}$. Der Beweis ist fertig, wenn wir zeigen können:

Beh.: Für $i = 1, \ldots, m$ gilt $\int_G d(\varepsilon_i\,\omega) \;=\; \int_{\partial G} \varepsilon_i\,\omega$.

⌈ Angenommen, $x_i \notin \partial G$. Da $\operatorname{supp}(\varepsilon_i\omega) \subset W_{x_i}$, berechnen wir mit der Einbettung γ_{x_i}, dass

$$\int_G d(\varepsilon_i\omega) \overset{\text{Bem. 14.5.13 (2)}}{=} \int^{\gamma_{x_i}} d(\varepsilon_i\omega) \overset{\text{Def. 14.5.1}}{=} \int_{\Omega_{x_i}} \gamma_{x_i}^* d(\varepsilon_i\omega)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_{x_i}^* d(\varepsilon_i\omega) \overset{\text{Satz 14.2.8}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} d(\gamma_{x_i}^* \varepsilon_i\omega) \overset{\text{Lem. 14.6.3}}{=} 0 \;.$$

Da $\varepsilon_i\omega = 0$ auf ∂G, gilt auch $\int_{\partial G} \varepsilon_i\,\omega = 0$.

Angenommen, $x_i \in \partial G$ und $n \geq 2$. Wie oben berechnet man

$$\int_G d(\varepsilon_i \omega) \;=\; \int_{H^n} d(\gamma_{x_i}^* \varepsilon_i \omega) \qquad (*)$$

Für das Randintegral betrachten wir die Einbettung $\tilde{\gamma} := \gamma_{x_i} \circ \tilde{\iota} : \tilde{\Omega} \to M$, mit $\tilde{\Omega} = \iota^{-1}(\Omega_{x_i}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Die Spur von $\tilde{\gamma}$ liegt in ∂G und enthält den Träger von $\varepsilon_i\, \omega|_{\partial G}$ (Warum?). Es gilt ⓘ

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \varepsilon_i\, \omega \;&=\; \int^{\tilde{\gamma}} \varepsilon_i\, \omega \;=\; \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\gamma}^*(\varepsilon_i \omega) \;=\; \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\iota}^*(\gamma_{x_i}^*(\varepsilon_i \omega)) \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{\iota}^*(\gamma_{x_i}^*(\varepsilon_i \omega)) \;=\; \int_{\partial H^n} \gamma_{x_i}^*(\varepsilon_i \omega) \qquad (**) \end{aligned}$$

Nach Lemma 14.6.3 sind die rechten Seiten von $(*)$ und $(**)$ gleich.

Den verbleibende Fall $x_i \in \partial G$ und $n = 1$ behandelt man analog. (Details?) ⌋ □ ?

Beispiel 14.6.8.

(1) $n = 1$: Sei $0 \leq a < b$ und sei $M \subset \mathbb{R}$ offenes mit $G := [a, b] \subset M$. Dann ist M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}$ und $G \subset \mathbb{R}$ glatt berandet und kompakt. Sei $\omega \in \mathcal{A}^0(M)$ stetig differenzierbar, also $\omega : M \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Der Satz von Stokes sagt $\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega$. Setzt man die Definitionen ein, erhält man (siehe Bemerkung 14.5.13 (4) für das 0-dimensionale Integral):

$$\int_a^b \tfrac{\partial}{\partial x} \omega(x) dx \;=\; \omega(b) - \omega(a)\ .$$

(Wo kommt das Minuszeichen auf der rechten Seite her?) Dies ist gerade der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 7.4.5). ?

Sei nun $M = (-3, -1) \cup (1, 3) \subset \mathbb{R}$ und sei $G = [-2, -1) \cup (1, 2) = [-2, 2] \cap M$. Der Rand vom G in M ist $\partial G = \{-2, 2\}$. Wähle $\omega \in \mathcal{A}^0(M)$ als

$$\omega(x) \;=\; \begin{cases} 0 & ; x \in (-3, -1) \\ 1 & ; x \in (1, 3) \end{cases} \qquad .$$

Dies ist eine $\mathcal{C}^1$-Funktion auf M (sogar $\mathcal{C}^\infty$). Dann

$$\int_G d\omega \;=\; \int_G 0 \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial G} \omega \;=\; \omega(2) - \omega(-2) \;=\; 1\ .$$

(Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Stokes? *Hinweis:* M ist nicht zusammenhängend, aber das ist ja auch gar nicht gefordert. Gehen Sie die einzelnen Voraussetzungen durch. Welche ist verletzt?) ?

(2) $n = 2$: Sei $M = \mathbb{R}^2$ und sei $G \subset M$ glatt berandet und kompakt. Betrachte $\omega = x\,dy \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^2)$. Dann $d\omega = dx \wedge dy$ und der Satz von Stokes sagt

$$\int_{\partial G} \omega \;=\; \int_G d\omega \;=\; \int_G 1\, d(x,y) \;=\; \lambda_2(G)\ .$$

Das 2-Volumen von G kann hier also als ein 1-dimensionales Integral über seinen Rand berechnet werden.

Wir schauen uns dies in einem konkreten Beispiel an. Sei $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq r\}$ für $r > 0$ die abgeschlossene Kreisscheibe von Radius r. Nach Beispiel 12.2.4 ist $\lambda_2(G) = \pi r^2$. Um das Randintegral zu berechnen, verwenden wir die Einbettung $\gamma : (-\pi, \pi) \to \partial G$, die durch Polarkoordinaten gegeben ist, $\gamma(\varphi) := P_2(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Die zurückgezogenen 1-Form $\gamma^*\omega$ ist

$$\gamma^*\omega \;=\; \gamma_1 \cdot d\gamma_2 \;=\; r^2(\cos\varphi)^2\, d\varphi\ .$$

Die Spur $\gamma(\,(-\pi,\pi)\,)$ unterscheidet sich von ∂G nur um eine 1-Nullmenge, und wir können berechnen:

$$\int_{\partial G} \omega \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \gamma^*\omega \;=\; r^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\varphi)^2\, d\varphi \;=\; \pi r^2\ .$$

Index

Poincaré-Lemma, 110