Klausur 1 Algebra 1 (SS 2013)

Name	
Vorname	
Matrikelnr.	
Studiengang	

Anweisungen:

- Hilfsmittel: Für die Bearbeitung sind **nur Stift und Papier** erlaubt (insbesondere keine Bücher, Mitschriften, etc.). Benutzen Sie einen permanenten Stift (Kugelschreiber o.ä., keinen Bleistift). Es sind **keine Mobiltelefone** erlaubt.
- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes Blatt**, das Sie abgeben, und heften Sie vor der Abgabe alle Blätter und die Klausuraufgaben mit einem Tacker zusammen.
- Die Klausur besteht aus 2 Teilen, **Teil A** und **Teil B**. Für jeden Teil gibt es 50 Punkte.
  - Die Aufgaben aus Teil A geben insgesamt 50 Punkte, bearbeiten Sie alle Aufgaben. **Alle Aufgaben aus Teil A werden gewertet**.
  - Teil B besteht aus 3 Aufgaben zu je 25 Punkten. Sie können alle Aufgaben bearbeiten, aber **es werden nur die besten beiden Aufgaben aus Teil B gewertet**.

Für die Korrektur:

Teil A	A1	A2	A3	A4	A5	Gesamt
Punkte						

Teil B	B1	B2	B3	Gesamt
Punkte				

- Sie können alle Sätze aus der Vorlesung verwenden. Ergebnisse der Übungsaufgaben dürfen Sie natürlich nur dann verwenden, wenn Sie diese nicht gerade zeigen sollen.
- Sie können Aussagen von Teilaufgaben für nachfolgende Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

Teil A

A1 (10 P)

1. Definieren Sie den Begriff der Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge X (also den Begriff einer G-Menge).
2. Die Permutationsgruppe S_n wirkt auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Ist die Wirkung treu? Transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
3. Sei X eine G-Menge. Zeigen Sie, dass der Stabilisator G_x eines Elementes $x \in X$ eine Untergruppe ist.

A2 (8 P)

Sei A eine abelsche Gruppe.

1. Definieren Sie die Torsionsuntergruppe $T(A)$ von A.
2. Zeigen Sie, dass $T(A)$ eine Untergruppe ist.

A3 (8 P)

Wir sagen, *ein kommutativer Ring A hat Charakteristik* $m > 0$, falls $1+1+\dots+1$ (m-mal) 0 ist, aber keine kürzere Summe von 1en 0 ergibt (also $\mathrm{ord}(1) = m$).

1. Definieren Sie den Begriff „Integritätsbereich“.
2. Ein Integritätsbereich habe Charakteristik $m > 0$. Zeigen Sie, dass m eine Primzahl ist.

A4 (6 P)

Geben Sie einen kommutativen Ring A und ein Polynom der Form

$$X^n \; + \; \text{(niedrigere Terme)}$$

an, das mehr als n Nullstellen in A hat. (Ein Beispiel für ein n reicht. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.)

A5 (18 P)

Sind die folgenden Polynome irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

1. $2X^5 + 6X^2 - 12$ in $\mathbb{Z}[X]$?
2. $2X^5 + 6X^2 - 12$ in $\mathbb{Q}[X]$?
3. $2X^5 + 6X^2 - 12$ in $\mathbb{R}[X]$?
4. $X^3 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$?
5. $3X^3 + 5X^2 + 2X - 9$ in $\mathbb{Q}[X]$?
6. $X^3 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_8[X]$? (Hier ist $\mathbb{F}_8$ der bis auf Isomorphie eindeutigen Körper mit 8 Elementen.)

Teil B

B1 – Sylowsätze

1. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch ist.

   Hinweis: In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass eine endliche p-Gruppe ein nichttriviales Zentrum hat.

2. Geben Sie die Aussage wieder, die die Sylowsätze über die Anzahl von p-Sylowuntergruppen machen.

3. Seinen p, q zwei verschiedene Primzahlen, so dass

   $$p \nmid q - 1 \quad \text{und} \quad p \nmid q + 1 \ .$$

   Zeigen Sie, dass eine Gruppe mit p^2q^2 Elementen genau eine p-Sylowuntergruppe enthält.

4. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $1225 = 5^2 \cdot 7^2$ abelsch ist.

   Hinweis: Prüfen Sie, dass die Bedingungen für ein inneres direktes Produkt erfüllt sind.

B2 – Minimalpolynome

Sei L/K eine Körpererweiterung.

1. Ein Element $a \in L$ habe die Eigenschaft, dass die Elemente $1, a, ..., a^{k-1}$ über K linear unabhängig sind, aber dass $1, a, ..., a^k$ linear abhängig sind. Es gibt also $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1} \in K$, so dass $a^k + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j a^j = 0$.

   Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von a durch $m_{a,K} = X^k + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j X^j$ gegeben ist.

2. Betrachten Sie $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$. Geben Sie das Minimalpolynom von $a = \sqrt{2} + i$ über $\mathbb{Q}$ an, und beweisen Sie Ihre Antwort.

3. Definieren Sie den Begriff „normale Körpererweiterung“, und geben Sie zwei äquivalente Charakterisierungen von „normal“.

4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)/\mathbb{Q}$ normal ist.

5. Wieviele $\mathbb{Q}$-Automorphismen hat $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$? Beweisen Sie Ihre Aussage.

B3 – Frobenius Automorphismus

Sei K ein endlicher Körper von Charakteristik $p > 0$ mit $|K| = p^n$. Sei $F : K \to K$ die Abbildung $a \mapsto a^p$.

1. Zeigen Sie, dass F ein Körperhomomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.

3. Zeigen Sie, dass $F^n = id$. (Hier steht F^n für $F \circ F \circ \cdots \circ F$, also F n-mal hintereinander angewendet.)

   Hinweis: Was ist die Ordnung von $K^\times$?

4. Zeigen Sie, dass F Ordnung n in $\mathrm{Aut}(K)$ hat.

   Hinweis: Nehmen Sie an, die Ordnung sei $s < n$. Was können Sie über die Nullstellen des Polynoms $X^{p^s} - X$ sagen?

5. Definieren Sie den Separabilitätsgrad $[L : M]_s$ einer Körpererweiterung L/M.

6. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(K) = \langle F \rangle$.