Übungsblatt # 12 Algebra (WS 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (4 P)
Sei K ein Körper. Sei $K(t)$ der Quotientkörper des Polynomrings $K[t]$.

1. Sei $h \in K(t)$ algebraisch über K. Zeigen Sie, dass $h \in K$ gilt.
2. Finden Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $(K, +) \to Aut_K(K(t))$.

Aufgabe 2 (4 P)
Zeigen Sie, dass $cos(20°)$ nicht konstruierbar ist. Was bedeutet dies für die Dreiteilung beliebiger Winkel mit Zirkel und Lineal?

Hinweis: Sie dürfen die Identität $cos(3\alpha) = 4cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha)$ benutzen.

Aufgabe 3 (6 P)
Sei K ein Körper und $f \in K[X] \setminus K$. Sei $L \subset \overline{K}$ der Zerfällungskörper von f wie in Z11 A2.

1. Sei M/K eine Körpererweiterung mit den Eigenschaften a) f zerfällt über M in Linearfaktoren, und b) M wird von den Nullstellen von f erzeugt. Zeigen Sie, dass $M \cong L$ als Körper.
(„Zerfällungskörper sind bis auf Isomorphie eindeutig.“)

Sei K nun ein endlicher Körper von Charakteristik p mit q Elementen. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $q = p^n$ für ein $n > 0$. Betrachte das Polynom $f = X^q - X$.

2. Zeigen Sie, dass für alle $a \in K$ gilt: $f(a) = 0$.
3. Zeigen Sie, dass zwei endliche Körper genau dann isomorph sind, wenn Sie gleich viele Elemente haben.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (4 P)

Sei K ein Körper. Definiere die K-lineare Abbildung $D : K[X] \to K[X]$ auf der Basis $\{X^n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ als $D(X^n) = nX^{n-1}$ für $n > 0$ und $D(1) = 0$. Man nennt D auch die *formale Ableitung nach* X.

1. Zeigen Sie, dass $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ für alle $f, g \in K[X]$.

Sei $f \in K[X] \setminus K$, und sei $a \in K$ eine Nullstelle von f. Wir sagen, dass $a \in K$ eine *einfache* Nullstelle von f ist, falls f nicht durch $(X-a)^2$ teilbar ist, und sonst nennen wir a eine *mehrfache* Nullstelle. In anderen Worten: Ist a eine mehrfache Nullstelle von f, so gilt $f = (X-a)^m g$ mit $g(a) \neq 0$ und $m \geq 2$. Bei einer einfachen Nullstelle ist $m = 1$.

2. Zeigen Sie, dass $a \in K$ genau dann eine mehrfache Nullstelle von $f \in K[X] \setminus K$ ist, falls $f(a) = 0$ und $D(f)(a) = 0$.

3. Sei L der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sei $q = p^n$ für ein $n > 0$. Zeigen Sie, dass $f = X^q - X$ keine mehrfachen Nullstellen in L hat.

4. (Zusatzaufgabe mit 0P)
   Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f in Teil 3 bereits einen Körper bilden.

   Hinweis: Benutzen Sie Z7 A6 (Frobenius Automorphismus).

   Bemerkung: Damit haben Sie dann gezeigt, dass es für jede Wahl von $n > 0$ einen Körper mit $q = p^n$ Elementen gibt. Nach Aufgabe 3.3 ist dieser eindeutig bis auf Isomorphie.

Aufgabe 5 (4 P)

1. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ nicht normal ist.

2. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ normal ist.

Aufgabe 6 (2 P)

Sei L/K eine algebraische nicht separabele Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $char(K) \neq 0$ gilt.

Zusatzaufgabe (0 P)

Die Umkehrung von 3.3, Kor. 5 gilt nicht: Sei $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei z eine Nullstelle von f in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 4$, aber $z \notin \mathcal{A}\{0,1\}$.

Hinweis: Seien $\{z, \bar{z}, w, \bar{w}\}$ die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ (warum sieht so die Menge von Nullstellen von f aus?). Warum folgt aus $z \in \mathcal{A}\{0,1\}$, dass auch $\bar{z}, w, \bar{w} \in \mathcal{A}\{0,1\}$? Überlegen Sie sich, dass $z\bar{z} + w\bar{w}$ eine Nullstelle von $X^3 - 4X - 1$ ist.