Übungsblatt # 10 Algebra (WS 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

Die folgenden Aussagen werden wir diese Woche beweisen, aber nicht alle am Mittwoch:

Satz. 5: Sei L/K eine Körpererweiterung und $a \in L$. Es sind äquivalent:

1. a is algebraisch über K.
2. $K[a] = K(a)$.
3. $\dim_K K(a) < \infty$.

Satz. 6: Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ unzerlegbar. Setze $L = K[X]/(f)$ und $n = \text{grad}(f)$. Dann $[L : K] = n$ und

$$\{1 + (f), X + (f), \ldots, X^{n-1} + (f)\}$$

ist eine K-Basis von L.

Kor. 7: Sei L/K eine Körpererweiterung und $a \in L$ algebraisch, $n = \text{grad}(m_{a,K})$. Dann $\dim_K K(a) = n$ und

$$\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$

ist eine K-Basis von L.

Aufgabe 1 (2 P)

Sei K ein Körper und sei p unzerlegbar und normiert in $K[X]$. Dann ist $L := K[X]/(p)$ ein Erweiterungskörper von K.

Was ist das Minimalpolynom des Elementes $X + (p) \in L$ über K? Was ist der Grad von L/K?

Aufgabe 2 (6 P)

Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Es sei $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

1. Geben Sie einen Algorithmus zu Bestimmung des Minimalpolynoms eines algebraischen Elementes an. Beweisen Sie, dass er funktioniert.
2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $m_{\alpha,\mathbb{Q}}$
3. Geben Sie ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ mit $P(\alpha) = \alpha^{-1}$ an.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (3 P)

Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Es seien $a = \sqrt[3]{2}$ und $b = \sqrt[4]{5}$. Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(a,b) : \mathbb{Q}]$.

Hinweis: Es gibt mindestens drei verschiedenen Lösungswege. Bei zweien davon ist die Schwierigkeit, zu sagen, was das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}(b)$, bzw. von b über $\mathbb{Q}(a)$, ist. Beim dritten Weg braucht man diese Minimalpolynome nicht explizit zu kennen.

Aufgabe 4 (5 P)

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

1. Jedes $f \in K[X]$, $f \notin K$, besitzt eine Nullstelle in K.
2. Jedes $f \in K[X]$ ist ein Produkt der Form $f = c(X - a_1) \cdots (X - a_n)$ mit $c, a_i \in K$, $n \geq 0$.
3. Jedes normierte unzerlegbare Polynom in $K[X]$ ist von der Form $X - a$ für ein $a \in K$.
4. Ist L/K algebraisch, so gilt $L = K$.

Aufgabe 5 (5 P)

Zeigen Sie:

1. Die Menge $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f \text{ ist unzerlegbar } \}$ ist abzählbar.
2. Die Menge $K = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist abzählbar.
3. K aus Teil 2 ist ein Körper.

Aufgabe 6 (3 P)

Bauen Sie einen Körper mit 9 Elementen. Berechnen Sie darin ein paar interessante Produkte.

Freiwillig: Wir wissen, dass die multiplikative Gruppe des Körpers, den Sie gerade gebaut haben, zyklisch ist. (Warum?) Können Sie einen Erzeuger angeben?