Übungsblatt # 09 Algebra (WS 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (2 P)

Beweisen Sie: In einem endlichen Körper gibt es immer nicht-konstante Polynome, die keine Nullstellen haben. („Endliche Körper sind nie algebraisch abgeschlossen.“)

Aufgabe 2 (4 P)

1. Sei K ein Körper, und sei $f \in K[X]$ ein Polynom mit $grad(f) \in \{2, 3\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann zerlegbar ist, wenn f eine Nullstelle hat.
2. Ist die Behauptung aus Teil 1 auch für f mit $grad(f) = 4$ richtig? Was passiert, wenn K nur ein Integritätsbereich ist?

Aufgabe 3 (3 P)

Wir hatten gesehen: Sei A ein faktorieller Ring und $f \in A[X]$ mit $grad(f) > 0$. Dann

$$f \text{ unzerlegbar in } A[X] \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ unzerlegbar in } Q(A)[X] \text{ und } c(f) = 1$$

Warum ist $grad(f) > 0$ notwendig? Warum $c(f) = 1$? Ist f in $A[X]$ zerlegbar, wenn es sich in $Q(A)[X]$ als Produkt von zwei nicht-konstanten Polynomen schreiben lässt?

Aufgabe 4 (4 P)

1. Zeigen Sie folgende Variation des Reduktionslemmas:
   Sei A ein faktorieller Ring und B ein Integritätsbereich. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\varphi_* : A[X] \to B[X]$ der entsprechende induzierte Ringhomomorphismus.

   Sei $f = \sum_{i=0}^{n} f_i X^i$ mit $n > 0$ und $\varphi(f_n) \neq 0$. Es gilt: Ist $\varphi_*(f)$ unzerlegbar in $B[X]$ oder $Q(B)[X]$, so ist f unzerlegbar in $Q(A)[X]$.
2. In der Aussage in Teil 1: Ist f auch unzerlegbar in $A[X]$? Was passiert, wenn man die Bedingung $\varphi(f_n) \neq 0$ weglässt? Falls $\varphi_*(f)$ zerlegbar ist (wieder mit $\varphi(f_n) \neq 0$), ist dann auch f in $Q(A)[X]$ zerlegbar?

Bitte wenden.

Aufgabe 5 (6 P)
Zeigen Sie:

1. Das Polynom $x^3 - 5x + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist unzerlegbar.

Sei p eine Primzahl.

2. Das Polynom $\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} x^n \in \mathbb{Q}[X]$ ist unzerlegbar.

   Hinweis: Machen Sie aus dem Polynom zunächst ein Element in $\mathbb{Z}[X]$.

3. Das Polynom $f_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1} \in \mathbb{Q}[X]$ ist unzerlegbar.

4. Sei zusätzlich $p > 2$. Das Polynom $x^2 + 1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ ist genau dann unzerlegbar, wenn $p = 3 \bmod 4$ gilt. Was passiert bei $p = 2$?

Aufgabe 6 (5 P)

1. Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Geben Sie Repräsentanten für alle Primelemente in $K[X]$ von Grad ≤ 2 an.

2. Sei p prim. Ist $f = \sum_{i=0}^{p-1} X^i Y^{p-1-i}$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ unzerlegbar?

   Hinweis: Verwenden Sie die Aussagen aus Aufgabe 3 und 4 (und 5), und achten Sie auf die Inhaltsbedingung.

3. Sei K ein Körper. Für ein Polynom

$$f = \sum_{\substack{I=(i_1,\ldots,i_n) \\ i_1,\ldots,i_n \geq 0}} a_I X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \in K[X_1, \ldots, X_n]$$

   in mehreren Unbekannten definieren wir den Grad als

$$grad(f) = \begin{cases} \max\{|I| = i_1 + \cdots + i_n \mid a_I \neq 0\} & f \neq 0 \\ -\infty & f = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass Polynome von Grad 1 in $K[X_1, \ldots, X_n]$ unzerlegbar sind. Geben Sie ein unzerlegbares Polynom von Grad 3 an, dass alle X_i enthält (unabhängig von K).