Übungsblatt # 08 Algebra (WS 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (4 P)

1. Lesen Sie den Text über Aussage und Beweis des Chinesischen Restsatzes auf der Webseite. Ist der dort bewiesene Satz noch richtig, wenn man die Bedingung „paarweise teilerfremd“ weglässt?

2. Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass $A \cong \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ für geeignete $m_i \geq 2$ mit $m_i | m_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots r-1$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen aus der Vorlesung und den Chinesischen Restsatz.

   Anmerkung: Man kann weiter zeigen, dass die m_i eindeutig durch A festgelegt werden. Dies gibt eine alternative Weise, die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen zu beschreiben.

Aufgabe 2 (5 P)
Sei A ein kommutativer Ring, und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Zeigen Sie:

1. I ist prim $\iff$ A/I ist ein Integritätsbereich.

2. I ist maximal $\iff$ A/I ist ein Körper.

3. Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

Aufgabe 3 (3 P)
Sei A ein Integritätsbereich und sei K ein Körper. Sei $\phi : A \to K$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Zeigen Sie: K enthält einen Unterkörper (d.h. einen Unterring, der ein Körper ist), der zu $Q(A)$ isomorph ist.

Aufgabe 4 (5 P)
Es sei $R = \mathbb{Z} + i\sqrt{6}\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Sei $x = 2 + i\sqrt{6}$. Zeigen Sie:

1. R ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

2. x ist unzerlegbar in R.

3. x ist nicht prim in R.

Hinweis: Die Abbildung $N : R \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto |z|^2$ ist multiplikativ. Welche Werte kann N annehmen?

Bitte wenden.

Aufgabe 5 (3 P)

Es gilt: $\{$ Kommutative Ringe $\} \supset \{$ Integritätsbereiche $\} \supset \{$Faktorielle Ringe$\} \supset \{$Hauptidealringe$\}$. Geben Sie für jede Klasse von Ringen ein Beispiel an, das nicht in der nächsten liegt.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass Polynomringe $K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K faktoriell sind. (Der Beweis kommt noch in der Vorlesung.)

Aufgabe 6 (4 P)

1. Geben Sie ein Beispiel für einem kommutativen Ring A und ein Polynom $f(x) \in A[x]$ an, so dass f mehr Nullstellen als $grad(f)$ hat.

2. Geben Sie ein Beispiel für einem kommutativen Ring A an, in dem $(A[x])^\times \neq A^\times$ gilt.