

# Übungsblatt # 06 Algebra (ws 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

---

## Aufgabe 1 (4 P)

1. Sei  $A$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Sei  $X \subseteq A$  ein Erzeugendensystem von  $A$ . Zeigen Sie, dass  $X$  ein endliches Erzeugendensystem von  $A$  enthält.
2. Sei  $F$  eine freie abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  - (a)  $F$  ist endlich erzeugt.
  - (b) Jede Basis von  $F$  ist endlich.

## Aufgabe 2 (6 P)

Betrachten Sie die abelschen Gruppen

$$A = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / (1, 2)\mathbb{Z} \quad , \quad B = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / (2, 2)\mathbb{Z} .$$

Geben Sie  $T(A)$  und  $T(B)$  an. Geben Sie in beiden Fällen eine direkte Summenzerlegung in eine freie Untergruppe und die Torsionsuntergruppe an. Sind mehrere Zerlegungen möglich, geben Sie zwei Beispiele an.

## Aufgabe 3 (4 P)

Sei  $p$  eine Primzahl.

1. Zeigen Sie (ohne den Klassifikationssatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen), dass die Gruppen  $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  nicht isomorph sind.
2. Geben Sie Repräsentanten von allen Isomorphieklassen von abelschen Gruppen von Ordnung  $p^4$  an. (Hier können Sie den Klassifikationssatz benutzen.)

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 4** (5 P)

1. Sei  $A \subseteq \mathbb{Q}$  eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie, dass  $A$  zyklisch ist.  
*Hinweis:* Sie können z.B. benutzen, dass jede Untergruppe von  $\mathbb{Z}$  von der Form  $m\mathbb{Z}$  ist, für ein  $m \in \mathbb{Z}$  (für  $m = 0$  erhält man die Untergruppe  $\{0\}$ ).
2. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}$  nicht endlich erzeugt ist.
3. Ist  $\mathbb{Q}$  frei?

**Aufgabe 5** (5 P)

Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  abelsche Gruppen.

1. Nehmen Sie an, dass  $A$ ,  $B$  und  $C$  endlich erzeugte abelsche Gruppen sind. Zeigen Sie, dass aus  $A \oplus B \cong C \oplus B$  folgt, dass  $A \cong C$ .
2. Beweis oder Gegenbeispiel: Was wird aus der Behauptung aus Teil 1, wenn  $B$  nicht als endlich erzeugt vorausgesetzt wird?