Übungsblatt # 04 Algebra (WS 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (6 P)

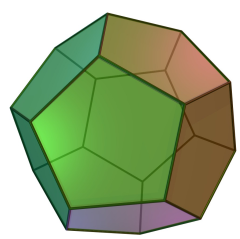
Beweisen Sie Satz 3 aus Kapitel 1.5: Sei G eine Gruppe und $M \leq N \leq G$. Dann gilt $[G : M] = [G : N][N : M]$.

Hinweise:

1. Betrachten Sie die Projektion $\pi : G/M \to G/N$, $xM \mapsto xN$. Warum ist dies eine wohldefinierte Abbildung?
2. Warum kann G/M wie folgt als disjunkte Vereinigung geschrieben werden: $G/M = \bigcup_{\alpha \in G/N} \pi^{-1}(\{\alpha\})$?
3. Finden Sie eine Bijektion zwischen $\pi^{-1}(\{xN\})$ und $\pi^{-1}(\{yN\})$, $x, y \in G$.

Aufgabe 2 (4 P)

Berechnen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe G eines regelmäßiges Pentagondodekaeders (siehe Bild). Benutzen Sie die Bahnformel und betrachten Sie mindestens zwei der drei Varianten 1) G operiert auf Ecken, 2) G operiert auf Kanten, 3) G operiert auf Seiten.



(Bild: wikipedia)

Aufgabe 3 (6 P)

Beweis oder Gegenbeispiel: Für jede Primzahl p ist

1. jede Gruppe der Ordnung p abelsch.
2. jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch.
   Hinweis: Warum hat eine solche Gruppe ein nicht triviales Zentrum?
3. jede Gruppe der Ordnung p^3 abelsch.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (3 P)

Sei $G \neq \{e\}$ eine endliche Gruppe und sei p die kleinste Primzahl die $|G|$ teilt. Sei $H \leq G$ eine Untergruppe von Index p. Zeigen Sie, dass H eine normale Untergruppe ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung von H auf G/H.

Aufgabe 5 (5 P)

1. Geben Sie alle 3-Sylow Untergruppen von S_4 an.
2. Seien G_1 und G_2 endlichen Gruppen, p eine Primzahl, und $\pi : G_1 \to G_2$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Sei $P \leq G_1$ eine p-Sylow-Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\pi(P)$ eine p-Sylow Untergruppe von G_2 ist.