# Übungsblatt # 02 Algebra (WS 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

---

**Aufgabe 1** (3 P)

Eine Gruppe $G$ heißt *zyklisch*, wenn es ein Element $g \in G$ gibt, so dass $\forall x \in G : \exists n \in \mathbb{Z} : x = g^n$.
Zeigen Sie: Eine Gruppe $G$ ist genau dann zyklisch, wenn sie zu $\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorph ist.

**Aufgabe 2** (4 P)

Beweis von Kapitel 1.3, Satz 1:
Sei $G$ eine Gruppe und $H_1, \dots, H_n$ Untergruppen von $G$. Definiere die Abbildung $f : H_1 \times \cdots \times H_n \to G$, $(h_1, \dots, h_n) \mapsto h_1 \cdots h_n$.
Zeigen Sie, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

1. $f$ ist ein Gruppenisomorphismus.
2. Es gilt $\forall a \in H_i, b \in H_j (i \neq j) : ab = ba$ und $\forall g \in G : \exists! h_1 \in H_1, \dots, h_n \in H_n : g = h_1 \cdots h_n$.

**Aufgabe 3** (10 P)

1. Beweis von Kapitel 1.3, Definition und Proposition 2:

   Zeigen Sie, dass $N \rtimes_\gamma H$, wie dort definiert, eine Gruppe ist.

   Geben Sie einen expliziten Ausdruck für das Inverse zu einem Element $(n, h) \in N \rtimes_\gamma H$ an.

2. Zeigen Sie, dass $S_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Hinweis: Benutzen Sie Satz 1.3.3 über das innere semidirekte Produkt.

3. Sind $N, H$ immer Untergruppen von $N \rtimes_\gamma H$? Immer normale Untergruppen? Wie ist das beim direkten Produkt $N \times H$? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 4** (7 P)

Beweis von Kapitel 1.3, Satz 4: Sei

$$1 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 1$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen, die durch den Gruppenhomomorphismus $\sigma : C \to B$ spaltet. Dann gilt $B \cong A \rtimes_\gamma C$ als Gruppen mit $\gamma : C \to \mathrm{Aut}(A)$ definiert durch

$$\iota(\gamma_c(a)) = \sigma(c)\iota(a)\sigma(c)^{-1} \ .$$

1. Warum macht die Definition von $\gamma$ wie oben überhaupt Sinn?

   (D.h., warum ist die rechte Seite im Bild von $\iota$, warum ist $\gamma_c$ eindeutig festgelegt, warum ist $\gamma_c$ ein Automorphismus, warum ist $c \mapsto \gamma_c$ ein Gruppenhomomorphismus?)

2. Betrachte die Abbildung $\varphi : A \rtimes_\gamma C \to B$, $(a, c) \mapsto \iota(a)\sigma(c)$. Zeigen Sie, dass dies ein Gruppenhomomorphismus ist.

3. Zeigen Sie, dass $\varphi$ injektiv und surjektiv ist.