Eine Gruppe ist *einfach*, wenn $\{e\}$ und G ihre einzigen normalen Untergruppen sind. (Manchmal fordert man noch $G \neq \{e\}$ dazu, wir hatten das in der Vorlesung nicht getan.)

Die *alternierende Gruppe* A_n ist die (normale) Untergruppe der Permutationsgruppe S_n, die durch den Kern der Signums-Abbildung gegeben ist, die also nur aus geraden Permutationen besteht.

Satz. A_n ist genau dann einfach, wenn $n \neq 4$.

Beweis. Wir haben $A_1 = \{id\}$, $A_2 = \{id\}$, $A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Für A_4 hatten wir in der Vorlesung die normale Untergruppe $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq A_4$ angegeben.

Sei nun $n \geq 5$.

Sei $N \leq A_n$ eine normale Untergruppe mit $N \neq \{id\}$. Wir zeigen zunächst, dass N einen 3-Zykel enthält und danach, dass jede normale Untergruppe, die einen 3-Zykel enthält, schon gleich A_n sein muss.

1. *N enthält einen 3-Zykel:* Sei $\sigma' \in N$ und sei $(k_1, \ldots, k_m)$ mit $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$ der Zykeltyp von σ. Wir machen eine Fallunterscheidung nach Zykeltyp:

   (a) $(r, \ldots)$ mit $r \geq 4$: Es gilt $\sigma = (a_1 a_2 \ldots a_r)\tau$ für ein geeignete $a_1, \ldots, a_r \in \{1, \ldots, n\}$ und τ. Sei $g = (a_1 a_2 a_3)$. Da $g \in A_n$ und N unter Konjugation mit Elementen von A_n abgeschlossen ist, folgt $g^{-1}\sigma g \in N$. Damit ist auch $\sigma^{-1} g^{-1} \sigma g = (a_2 a_3 a_r) \in N$. (Warum ist das gleich?)

   (b) $(3, 3, \ldots)$: Es gilt $\sigma = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)\tau$. Mit $g = (a_1 a_2 a_4)$ gilt $\sigma^{-1} g^{-1} \sigma g = (a_1 a_2 a_4 a_3 a_6) \in N$. Jetzt können wir Fall (a) anwenden.

   (c) $(3, 2, 2, \ldots, 2)$: Es gilt $\sigma = (a_1 a_2 a_3)\tau$ für ein geeignetes τ mit $\tau^2 = id$. Daher gilt $\sigma^2 = (a_1 a_3 a_2) \in N$.

   (d) $(2, 2, \ldots, 2)$: Es gilt $\sigma = (a_1 a_2)(a_3 a_4)\tau$. Sei $g_1 = (a_1 a_2 a_3)$, $g_2 = (a_1 a_2 a_5)$. Dann $\sigma^{-1} g_1^{-1} \sigma g_1 = (a_1 a_4)(a_2 a_3) =: \alpha \in N$ und $g_2^{-1} \alpha g_2 = (a_1 a_3)(a_4 a_5) =: \beta \in N$. Somit auch $\alpha\beta = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) \in N$, und N enthält einen 3-Zykel nach Fall (a).

2. *Eine normale Untergruppe $N \leq A_n$, die einen 3-Zykel enthält, ist gleich A_n:* Sei $(abc) \in N$. Alle 3-Zykel sind in S_n konjugiert. Sei $(ijk) \in S_n$ ein beliebiger 3-Zykel und $g \in S_n$ so dass $g(abc)g^{-1} = (ijk)$. Wenn schon $g \in A_n$, dann auch $(ijk) \in N$ (da N in A_n normal ist). Wenn $g \notin S_n$, dann können wir ein $\tau \in S_n$ mit $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ finden, so dass auch für $h := \tau g$ gilt: $h(abc)h^{-1} = (ijk)$. (Warum? Hinweis: Benutzen Sie, dass $n \geq 5$ gilt.) Also enthält N mit einem 3-Zykel auch alle 3-Zykel. Auf Zettel 3 Aufgabe 4 haben wir gesehen, dass A_n von 3-Zykeln (ijk) erzeugt wird.

$\square$