Lösungshinweise zum Weihnachtszettel Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu Aufgabe W1 (2 P)

1. [1P] Setzen wir $X = Z = \{a, b\}$, $Y = \{a\}$, $f : X \to Y$ die Abbildung $a, b \mapsto a$ und $g : Y \to Z$ die Abbildung $a \mapsto a$, so ist f surjektiv und g injektiv, aber die Verkettung $g \circ f$ ist weder injektiv noch surjektiv. In der Tat ist $g \circ f$ als Abbildung zwischen zwei endlichen Menge gleicher Kardinalität genau dann surjektiv, wenn sie injektiv ist, aber es gilt

$$(g \circ f)(a) = a = (g \circ f)(b).$$

2. [1P] Seien f, g surjektiv. Wir zeigen, dass dann auch $g \circ f$ surjektiv ist.

   Sei also $z \in Z$. Da g surjektiv ist existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist existiert $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also gilt insgesamt

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

   und damit ist $g \circ f$ surjektiv.

   Allerdings ist $g \circ f$ nicht notwendigerweise injektiv. Man betrachte zum Beispiel $X = \{a, b\}$, $Y = Z = \{a\}$, und die Abbildungen $f(a) = f(b) = a$ und $g(a) = a$. Dann gilt

$$(g \circ f)(a) = a = (g \circ f)(b).$$

Zu Aufgabe W2 (4 P)
[1P] Wir benutzen das Gaußverfahren, und bringen das LGS in Stufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & t^2 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (t-2)(t+2) & t-2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

[3P] **Fallunterscheidung:**

Fall 1: $t \neq \pm 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{t}{t+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t+1}{t+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+2} \end{pmatrix}$, also ist die Lösungsmenge $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{t}{t+2} \\ -\frac{t+1}{t+2} \\ \frac{1}{t+2} \end{pmatrix} \right\}$ einelementig.

Fall 2: $t = -2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, also ist die Lösungsmenge leer.

Fall 3: $t = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge.

Zu Aufgabe W3 (4 P)
[1P] Angenommen, H ist eine Untergruppe von G. Nach UG1 ist $e \in H$, also ist H nicht leer. Ist $b \in H$, so gilt nach UG3 auch $b^{-1} \in H$, und für $a \in H$ folgt in Verbindung mit UG2 also insgesamt

$$ab^{-1} \in H.$$

[3P] Sei nun $H \subset G$ eine Teilmenge, welche die Bedingungen 1. und 2. erfüllt. Wir müssen zeigen, dass die definierenden Eigenschaften einer Untergruppe erfüllt sind.

1. *Es gilt $e \in H$.*

   Da H nach Bedingung 1. nicht leer ist gibt es $h \in H$. Wenden wir Bedingung 2. im Fall $a = b = h$ an, so folgt

   $$e = hh^{-1} \in H.$$

2. *Ist $h \in H$, so gilt auch $h^{-1} \in H$.*

   Dies folgt aus Anwendung von Bedingung 2. im Fall $a = e$, $b = h$.

3. *Sind $h_1, h_2 \in H$, so gilt auch $h_1 h_2 \in H$.*

   Dies folgt aus Bedingung 2. angewendet auf $a = h_1$, $b = h_2^{-1}$.

Zu Aufgabe W4 (5 P)

1. [1P] Sind $r_1, r_2 \in R^*$, so gibt es also $s_1, s_2 \in R$ mit

   $$r_1 s_1 = 1 = s_1 r_1, \qquad r_2 s_2 = 1 = s_2 r_2.$$

   Daraus folgt

   $$(r_1 r_2)(s_2 s_1) = r_1 (r_2 s_2) s_1 = r_1 s_1 = 1$$

   und ebenso zeigt man $(s_2 s_1)(r_1 r_2) = 1$.

   [1P] Da die Multiplikation in einem Ring per Definition assoziativ ist, und $1 \in R^*$ gilt (man wähle $s = 1$), so ist also nur noch zu zeigen, dass zu $r \in R^*$ auch $r^{-1} \in R^*$ gilt. Dies folgt aber aus der Definition des Inversen, denn es gilt

   $$rr^{-1} = 1 = r^{-1} r.$$

2. [1P] In einem Körper hat jedes Element $x \in K \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses. Aus der Definition des Inversen folgt also sofort, dass

   $$K^* = K \setminus \{0\}.$$

3. [1P] Sei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Da gilt in jedem Fall $a^{-1} \in \mathbb{Q}$. Aber das Inverse a^{-1} ist der Bruch $1/a$ und es gilt $0 < |\frac{1}{a}| < 1$ für $|a| > 1$, also a^{-1}. Wegen $1^{-1} = 1$ und $(-1)^{-1} = -1$ folgt also
$$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}.$$
[1P] Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und $[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ endlich ist folgt aus Blatt 5, Aufgabe 19, dass $[a]$ genau dann ein Inverses hat, wenn $[a]$ kein Nullteiler ist. Nun ist $[a]$ genau dann ein Nullteiler, wenn es $b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $m \nmid b$ (d.h. $[b] \neq 0$) und $m \mid ab$, und dies gilt genau dann, wenn a einen gemeinsamen Teiler mit m hat. Also gilt
$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \ \mid \ a \text{ ist teilerfremd zu } m\}.$$

Zu Aufgabe W5 (3 P)
Wir weisen die definierenden Eigenschaften M1-M3 eines Vektorraumes nach (Definition 2.1.1).

1. Seien $r, s \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gelten
$$\begin{aligned} (r+s)\hat{\cdot}x &= x^{r+s} = x^r x^s = r\hat{\cdot}x\hat{+}s\hat{\cdot}x \\ r\hat{\cdot}(x\hat{+}y) &= (xy)^r = x^r y^r = r\hat{\cdot}x\hat{+}r\hat{\cdot}y. \end{aligned}$$
2. Seien $r, s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt
$$(rs)\hat{\cdot}x = x^{rs} = (x^s)^r = r\hat{\cdot}(s\hat{\cdot}x).$$
3. Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt
$$1\hat{\cdot}x = x^1 = x.$$

Zu Aufgabe W6 (3 P)
Sei $k := \dim_K U$ und $(v_i)_{i=n-k+1,\ldots,n}$ eine Basis von U. Ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1,\ldots,n}$ von K^n. Sei $\mathcal{A} = (e_i)_{i=1,\ldots,n}$ die Standardbasis von K^n. Dann erfüllt die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$
$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} v_i = e_i$$
für alle $i = 1, ..., n$. Sei weiterhin $I_{m\times n} = (\delta_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, wobei $m := n - k$. Setzen wir nun $A := I_{m\times n} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, so gilt
$$Av_i = \begin{cases} e_i & \text{falls } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{falls } m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$
Also leistet die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ das Gewünschte.

Die Minimalität von $m = n-k$ sieht man so. Ist $B \in \mathrm{Mat}(m' \times n)$ eine beliebige Matrix mit $U = \ker(\mathcal{L}(B))$, wobei $\mathcal{L}(A) : K^n \to K^{m'}$ die zu B gehörige lineare Abbildung ist, so folgt aus der Dimensionsformel (Satz 2.6.9)

$$n - m' \leq k.$$

Also gilt in jedem Fall $m' \geq n - k$.

Zu Aufgabe W7 (3 P)

1. Wir wenden das Gauß Verfahren auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & -9 & -18 & -9 \\ -4 & -13 & 9 & -8 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 6 & 7. \end{pmatrix}$$

an um diese auf Zeilenstufenform zu bringen. Dies liefert die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1, \end{pmatrix}$$

und damit ist $(v_i)_{i=1,\ldots,5}$ ein Erzeugendensystem.

2. Eine Möglichkeit ist die Familie $(v_i)_{i \in J}$ mit $J = \{1, 3, 5\}$. Diese Familie ist linear unabhängig, wie man durch Anwendung des Gauß Verfahrens auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} -9 & -9 & -9 \\ -4 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 7. \end{pmatrix}$$

sieht. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} -9 & -9 & -9 \\ 0 & -13 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{40}{13}. \end{pmatrix}$$

Das resultierende LGS hat also nur die triviale Lösung, und wir haben drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gefunden, die notwendigerweise eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.