Lösungshinweise zu Blatt # 11
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. [1P] Wir betrachten $d_n(I_{n\times n}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(I_{n\times n})_{k1}d_{n-1}((I_{n\times n})_{\langle k1\rangle})$. Bis auf $k=1$ verschwindet jeder Term der Summe und ebenso für $d_{n-1}(I_{n-1\times n-1})$, etc. Es folgt $\det(I_{n\times n}) = d_n(I_{n\times n}) = 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1$.

2. [1P] Nein. Denn betrachte z.B. $n=2$, $a_1 = (1,0)$ und $b=(0,1)$. Dann gibt es ein $r \in K$, sodass $M(rb) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & r\end{smallmatrix}\right) \neq r\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = rM(b)$.

3. [1P] Da S_n aus $n!$ Elemente besteht, tauchen in der Leibniz Formel ebenso viele Summanden auf. Offensichtlich muss man auch bei der rekursiven Formel im Allgemeinen $n!$ Terme bestimmen.

4. [1P] Es gilt z.B. $\sigma = \tau_{23}\circ\tau_{13}$ sowie $\sigma = \tau_{12}\circ\tau_{13}\circ\tau_{23}\circ\tau_{12}$.

5. [1P] Man überzeugt sich leicht, dass $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1\end{smallmatrix}\right) = \tau_{12}\circ\tau_{24}\circ\tau_{35}\circ\tau_{45}$ gilt. Nach Lemma 3.2.5 ist das Signum der Permutation daher $(-1)^4 = 1$.

Zu Aufgabe 49 (2 P) Wie in dem Satz beweisen wir die Aussagen durch vollständige Induktion. Für $n=1$ ist sie sicher richtig. Wir nehmen also an, dass $n \geq 2$ und die Aussage für $n-1$ wahr sei. Es gilt

$$\begin{aligned} d_n(M(rb)) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M(rb)_{k1}\cdot d_{n-1}\left(M(rb)_{\langle k1\rangle}\right) \\ &= (-1)^{i-1}M(rb)_{i1}\cdot d_{n-1}\left(M(rb)_{\langle i1\rangle}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1,k\neq i}^{n}(-1)^{k-1}M(rb)_{k1}\cdot d_{n-1}\left(M(rb)_{\langle k1\rangle}\right). \end{aligned}$$

Für $l \neq i$ haben wir aber

$$\begin{aligned} M(rb)_{i1} &= rM(b)_{i1} \\ M(rb)_{\langle i1\rangle} &= M(b)_{\langle i1\rangle} \quad \text{(da unabhänging vom Argument)} \\ M(rb)_{l1} &= M(b)_{l1} \\ d_{n-1}\left(M(rb)_{\langle l1\rangle}\right) &= rd_{n-1}\left(M(b)_{\langle l1\rangle}\right) \quad \text{(nach Annahme).} \end{aligned}$$

Es folgt

$$d_n(M(rb)) = r\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M(b)_{k1}\cdot d_{n-1}\left(M(b)_{\langle k1\rangle}\right) = rd_n(M(b)).$$

Zu Aufgabe 50 (2 P) Dies zeigt man durch einfaches Nachrechnen z.B. mit der rekursiven Formel mit Minoren. Die Formel lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Zu Aufgabe 51 (2 P) Seien i und j die vertauschten Einträge. Wir behaupten, dass jedes $\pi \in S_n$ mit $\pi(1) = i$ und $\pi(2) = j$ die gewünschte Eigenschaft hat: In der Tat gilt wegen $\pi^{-1}(i) = 1$ und $\pi^{-1}(j) = 2$

$$\left(\pi \circ \tau_{12} \circ \pi^{-1}\right)(i) = j \quad \text{und} \quad \left(\pi \circ \tau_{12} \circ \pi^{-1}\right)(j) = i.$$

Wegen $\tau_{12}(k) = k$ für $k \neq 1, 2$, gilt zudem $\left(\pi \circ \tau_{12} \circ \pi^{-1}\right)(l) = l$ für $l \neq i, j$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Zu Aufgabe 52 (6 P)

1. [2 P] Wir schreiben abkürzend $\varphi(v, w)$ statt $\varphi(\ldots, v, \ldots, w, \ldots)$.

$$\begin{aligned} \varphi(v,w) + \varphi(w,v) &= \varphi(v,w) + \varphi(w,v) + \varphi(v,v) + \varphi(w,w) \\ &= \varphi(v, w+v) + \varphi(w, v+w) \\ &= \varphi(v+w, v+w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. [2 P] Wählt man $w = v$, dann folgt $\varphi(v, v) = -\varphi(v, v)$ also $2\varphi(v, v) = 0$.

3. [2 P] Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit nur zwei Elementen 0 und 1. Dann gilt $1+1 = 0$, denn andernfalls wäre $1 = 0$ aufgrund der Eindeutigkeit des Nullelements. Also ist $\mathrm{char}(\mathbb{F}_2) = 2$. Wir betrachten nun den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2$ und die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2$, $(v, w) \mapsto vw$. Diese ist sicher bilinear (2-multilinear). Weil 1 additiv selbstinvers ist (d.h. 1=-1), gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \varphi(1,0) &= 0 \qquad & \varphi(0,1) &= 0 \\ \varphi(0,0) &= 0 \qquad & \varphi(1,1) &= 1 = -1 \end{aligned}$$

Allgemein ist also $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$, aber nicht $\varphi(v, v) = 0$.

Zu Aufgabe 53 (5 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. [2 P] Wir zeigen die Eigenschaft mithilfe der Formel von Leibniz:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)}.$$

Da S_n eine Gruppe ist, besitzt jedes $\sigma \in S_n$ ein Inverses. Zudem gilt nach Korrolar 3.2.4 $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$. Wir ersetzen nun in der Formel oben k mit $\sigma^{-1}(i)$ und erhalten

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\sigma^{-1}(i)=1}^{n} A_{\sigma^{-1}(i)i}.$$

Da σ die Menge $\{1, \dots, n\}$ bijektiv auf sich selbst abbildet (und genauso σ^{-1}), können wir das Produkt auch von 1 bis n laufen lassen. (Dies entspricht einer Umsortierung der Faktoren.) Also

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma^{-1}(i)i} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A^t_{i\sigma(i)} = \det A^t,$$

wobei wir im vorletzem Schritt ausgenutzt haben, dass wir über alle Elemente in S_n summiert haben und deshalb σ^{-1} mit σ ersetzen dürfen.

2. [3 P] Diese Eigenschaften folgen aus $\det A = \det A^t$ und (D1), (D2):

(D1s):

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & | & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & b+c & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & | & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ - & b+c & - \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ - & b & - \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ - & c & - \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & | & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & b & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & | & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & | & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & c & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & | & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & | & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & rb & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & | & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ - & rb & - \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= r\cdot\det\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ - & b & - \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = r\cdot\det\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & | & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & b & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & | & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(D2s):

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & | & \dots & | & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & b & \dots & b & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & | & \dots & | & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ - & b & - \\ \vdots & & \vdots \\ - & b & - \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

Zu Aufgabe 54 (2 P)
Da Summen und skalare Vielfache von alternierenden Funktionen wieder alternierend sind und Gleiches für die n-Multilinearität gilt, sind die Vektorraumaxiome sicher erfüllt. Wir zeigen, dass dieser Vektorraum eindimensional ist: Wir wählen zunächst eine Basis $v_1, \dots, v_n$ in V und zeigen, dass je zwei Elemente linear abhängig sind. Seinen also φ, ψ n-multilinear und alternierend und

$$a := \varphi(v_1, \dots, v_n), \qquad b := \psi(v_1, \dots, v_n).$$

Behauptung. Es gilt $a = 0 \implies \varphi = 0$ und $b = 0 \implies \psi = 0$.

Beweis. Seien $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren in V. Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis bilden, gibt es ein $A = (A_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, so dass

$$\begin{aligned} w_1 &= A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + \ldots + A_{1n}v_n \\ w_2 &= A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + \ldots + A_{2n}v_n \\ &\vdots \\ w_n &= A_{n1}v_1 + A_{n2}v_2 + \ldots + A_{nn}v_n \end{aligned}$$

Satz 3.2.8 liefert nun

$$\varphi(w_1, \ldots, w_n) = \det A \cdot a = 0$$
$$\psi(w_1, \ldots, w_n) = \det A \cdot b = 0$$

□

Behauptung. $b\varphi - a\psi = 0$.

Beweis. Seien $w_1, \ldots, w_n$ beliebige Vektoren in V und A definiert wie in der Behauptung oben. Nach Satz 3.2.8 gilt

$$\varphi(w) = \det A \cdot a, \qquad \psi(w) = \det A \cdot b$$

Damit folgt

$$b\varphi(w) - a\psi(w) = b \det A \cdot a - a \det A \cdot b = 0.$$

□

Sind nun $a = b = 0$, dann waren aber auch $\varphi = \psi = 0$. Andernfalls existiert eine nicht-triviale Linearkombination. Damit ist die Dimension des Vektorraums ≤ 1. Anderseits ist mit det ein Element $\neq 0$ gegeben. Also ist die Dimension 1.