Lösungshinweise zu Blatt # 8
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zur kurzen Information
Man erhält, z.B. mit der Dimensionsformel, $\dim \ker f = 241$. Alternativ überlegt man sich, dass sich das Gleichungssystem $f(M) = 0$ als $1 \times (11 \cdot 22)$-Matrix schreiben lässt, wobei mindestens ein Eintrag ungleich Null ist. Mit dem Gauß-Algorithmus lässt sich dies auf die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ bringen, mit 241 Nullen. Dies ist die Dimension des Kerns.

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. [1P] Die Aussage ist falsch. Denn sei $V = \mathbb{R}$ und $v_1 = 0$. Dann ist (v_1) linear abhängig und $\dim V \geq 1$.
2. (a) [1P] Wäre $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, würde aus Satz 2.4.12(i) $|I| \leq n$ folgen. Dies ist ein Widerspruch.
   (b) [1P] Nach Satz 2.4.9 enthält das Erzeugendensystem $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis $B \subset I$. Da $|I| = n = \dim V = |B|$ folgt mit Korollar 2.4.13 und Definition 2.4.14 $B = I$ und somit die Aussage.
   (c) [1P] Nach Satz 2.4.10 lässt sich die linear unabhängige Familie $(v_i)_{i\in I}$ mit $|I| = n$ zu einer Basis ergänzen. Da aber jede Basis nach Korollar 2.4.13 und Definition 2.4.14 $n = \dim V$ Elemente enthält, ist $(v_i)_{i\in I}$ bereits eine Basis.
3. [1P] $(I_n + kE_{ij})(I_n - kE_{ij}) = I_n - kE_{ij} + kE_{ij} - k^2E_{ij}^2 = I_n$, da $E_{ij}^2 = 0$ für $i \neq j$.

Zu Aufgabe 34 (10 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. (a) [2P]
   "$\Rightarrow$" Wir beweisen die Aussage durch Kontraposition. Sei $(f(v_i))_{i\in I}$ linear abhängig. Dann existiert ein $J \subset I$, $|J| < \infty$, so dass $\sum_{j\in J} k_j f(v_j) = 0$ und mindestens ein $k_j \neq 0$. Da f K-linear ist, folgt $f(\sum_{j\in J} k_j v_j) = 0$ und $\sum_{j\in J} k_j v_j \neq 0$, da $(v_j)_{j\in J}$ als Teilmenge einer Basis in V linear unabhängig ist. Also ist f nicht injektiv.
   "$\Leftarrow$" Sei $v \in \ker f$. v lässt sich eindeutig schreiben als $v = \sum_{j\in J} k_j v_j$ für ein endliches $J \subset I$. Da $v \in \ker f$ folgt,
   $$0 = f(v) = f(\sum_{j\in J} k_j v_j) = \sum_{j\in J} k_j f(v_j).$$

Da $(f(v_i))_{i\in I}$ linear unabhängig ist, folgt $k_j = 0$ für alle $j \in J$ und somit $v = 0$. Also ist $\ker f = \{0\}$ und somit ist f injektiv.

(b) [2P]

"⇒" Sei $w \in W$. Da f surjektiv ist, existiert ein $v \in V$, so dass $f(v) = w$. Schreibe v als $v = \sum_{j\in J} k_j v_j$ für ein endliches $J \subset I$. Also gilt $w = f(\sum_{j\in J} k_j v_j) = \sum_{j\in J} k_j f(v_j)$ und somit ist $(f(v_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem.

"⇐" Sei $w \in W$ und schreibe w als $w = \sum_{j\in J} k_j f(v_j)$ für ein endliches $J \subset I$. Damit ist $w = f(\sum_{j\in J} k_j v_j)$ und somit ist f surjektiv.

(c) [1P] Es ist f bijektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv und f surjektiv. Somit ist f bijektiv genau dann, wenn $(f(v_i))_{i\in I}$ sowohl Erzeugendensystem als auch linear unabhängig ist. Dies ist aber nach Definition äquivalent dazu, dass $(f(v_i))_{i\in I}$ eine Basis ist.

2. [3P] Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis und f sei entweder surjektiv oder injektiv. Dann ist nach Aufgabenteil 1b und 1a $(f(v_i))_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem oder eine linear unabhängige Menge aus $|I| = \dim V = \dim W$ Elementen. In beiden Fällen ist $(f(v_i))_{i\in I}$ dann bereits eine Basis (vgl. Kurze Fragen 2b und 2c) und nach Aufgabenteil 1c ist f somit bijektiv.

   Die Rückrichtung folgt, da eine Basis sowohl linear unabhängig als auch ein Erzeugendensystem ist.

3. [2P] Nein, denn sei $f \in \mathrm{End}(\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}))$ die K-lineare Abbildung definiert durch $f(\delta_k) = \delta_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$. f ist surjektiv und nicht injektiv, denn $(f(\delta_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein Erzeugendensystem, aber nicht linear unabhängig, denn $0 = \delta_0 \in (f(\delta_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

   Nein, denn sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$. Dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv.

Zu Aufgabe 35 (2 P) Mit dem Gauß-Verfahren lässt sich die Matrix auf folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Man liest ab: $L_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Zu Aufgabe 36 (2 P)

"⇒" Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist nach Aufgabe 34 $(f(v_i))_{i\in I}$ eine Basis mit $|I|$ Elementen. Also folgt $\dim V = \dim W$.

"$\Leftarrow$" Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(w_i)_{i\in I}$ eine Basis von W. Es sei $f : V \to W$ die K-lineare Abbildung definiert durch $f(v_i) = w_i$ für $i \in I$. Nach Aufgabe 34 ist f bijektiv.

Zu Aufgabe 37 (3 P) Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Mit dem Gauß-Algorithmus (vgl. Satz 2.5.2) lässt sich das System umformen zu $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei

$$\tilde{A} = U_1 \dots U_l A P = \begin{pmatrix} I_r & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und } \tilde{b} = U_1 \dots U_l b = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix}.$$

Es ist nun $L_b = \emptyset$ genau dann, wenn $\tilde{b}_i \neq 0$ für $r < i \leq m$.
Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann gilt $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ für $\tilde{x} = \tilde{b}$. Setze $x_0 = P^{-1}\tilde{b}$. Dann gilt $Ax_0 = b$ und somit ist $x_0 \in L_b$.
Sei nun $x_0' \in L_b$ eine weitere Lösung. Dann gilt $A(x_0' - x_0) = 0$, also $u := x_0' - x_0 \in L_0$. Somit lässt sich jede beliebige Lösung x_0' eindeutig darstellen als

$$x_0' = x_0 + u.$$

Zu Aufgabe 38 (2 P) Den Hinweis erhält man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite. Betrachte $R = \mathrm{End}(V)$ als Ring über K. Sei nun $N \in \mathrm{End}(V)$ und $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $N^k = 0$. Für $x = -N$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V - N^k &= (\mathrm{id}_V + N)(\mathrm{id}_V - N + N^2 - \dots + (-1)^{k-1} N^{k-1}) \\ &= (\mathrm{id}_V + N) \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j, \end{aligned}$$

also ist $(\mathrm{id}_V + N)^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j N^j$.
Sei nun $F, N \in \mathrm{End}(V)$, wie in der Aufgabe. Setze $\tilde{N} = N \circ F^{-1}$. Es ist $F + N = (\mathrm{id}_V + N \circ F^{-1}) \circ F = (\mathrm{id}_V + \tilde{N}) \circ F$ und $\tilde{N}^k = (N \circ F^{-1})^k = N^k \circ F^{-k} = 0$, wegen $F \circ N = N \circ F$. Somit ist, unter Verwendung obiger Formel für $(\mathrm{id}_V + \tilde{N})^{-1}$,

$$(F + N)^{-1} = F^{-1}(\mathrm{id}_V + \tilde{N})^{-1} = F^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \tilde{N}^j = F^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (N \circ F^{-1})^j.$$