Lösungshinweise zu Blatt # 7
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. [1P] Nein. Zum Beispiel $V = \mathbb{R}$, $v_1 = (1)$, $v_2 = (2)$.
2. [1P] Ja, denn jedes Element von $(v_i)_{i\in I}$ und $(v_j)_{j\in J}$ erscheint auch in $(v_i)_{i\in I\cup J}$.
3. [1P] Nein. Sei zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ mit kanonischer Basis (e_1, e_2). Dann ist $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_2\}$ ein Untervektorraum, aber es gilt $e_i \notin U$ für $i = 1, 2$.
4. [1P] Nein. Sei zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ mit kanonischer Basis (e_1, e_2), und $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1\}$. Dann ist $[e_1] = [0]$, und damit die Familie der Restklassen $([e_1], [e_2])$ nicht linear unabhängig.
5. [1P] Nein. Es gilt
$$(1, 2, 3) - 2(4, 5, 6) + (7, 8, 9) = 0.$$

Zu Aufgabe 28 (4 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. [2P] Per Annahme ist $(v_i)_{i\in I}$ bereits ein Erzeugendensystem. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist. Seien also $k_i \in K$, $k_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ mit
$$0 = \sum_{i\in I} k_i v_i.$$
Dann gilt für jedes $j \in I$ auch $-k_j v_j = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} k_i v_i$. Wäre $k_j \neq 0$, so gälte $v_j \in \mathrm{Span}_K(v_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$, also
$$\mathrm{Span}_K(v_i)_{i\in I\setminus\{j\}} = \mathrm{Span}_K(v_i)_{i\in I} = V,$$
im Widerspruch dazu, dass $\mathrm{Span}_K(v_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ kein Erzeugendensystem ist. Also muss $k_j = 0$ gelten, und da $j \in I$ beliebig war folgt $k_i = 0$ für alle $i \in I$. Daher ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.
2. [2P] Sei $w \in V$. Per Annahme gibt es eindeutig bestimmte $k_i \in K$ mit $k_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$, so dass
$$w = \sum_{i\in I} k_i v_i. \qquad (*)$$

Damit ist für jedes $w \in W$ die Familie $((v_i)_{i \in I}, w)$ linear abhängig.

Es bleibt zu zeigen, dass die Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist. Angenommen es gibt $k_i \in K$, $k_i = 0$ für fast alle $i \in I$ mit

$$0 = \sum_{i \in I} k_i v_i. \qquad (**)$$

Diese k_i sind nach Voraussetzung (angewendet auf $w = 0$) aber eindeutig bestimmt. Daraus folgt $k_i = 0$ für alle $i \in I$, denn diese Wahl der k_i erfüllt Gleichung $(**)$. Damit ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Zu Aufgabe 29 (2 P)
Seien $k_i \in K$ mit $k_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ und k_* mit

$$k_* w + \sum_{i \in I} k_i v_i = 0$$

gegeben. Wäre $k_* \neq 0$, so folgte $w = -k_*^{-1} \sum_{i \in I} k_i v_i$, im Widerspruch zu $w \notin \mathrm{Span}_K (v_i)_{i \in I}$. Also gilt $k_* = 0$. Da per Annahme $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist, folgt auch $k_i = 0$ für alle $i \in I$.

Zu Aufgabe 30 (2 P)
Sei $f \in \mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K)$. Da $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele $x \in X$ gilt per Definition von δ_x

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \delta_x. \qquad (*)$$

Also ist $(\delta_x)_{x \in X}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K)$. Da zwei Funktionen $f, g : X \to K$ genau dann gleich sind, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt, so folgt die Eindeutigkeit der Darstellung $(*)$, und damit ist nach Satz 2.4.6 die Familie $(\delta_x)_{x \in X}$ eine Basis von $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K)$.

Zu Aufgabe 31 (4 P)

1. (a) [1P] *Existenz*
   Nach Satz 6 von Kapitel 2 gibt es zu gegebenem $v \in V$ eindeutige $k_i \in K$, $k_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ so dass

   $$v = \sum_{i \in I} k_i v_i.$$

   Definiere $f(v) = \sum_{i \in I} k_i w_i$. Da diese Darstellung für gegebenes v eindeutig ist, ist f wohldefiniert. Die K-Linearität von f sieht man wie folgt. Seien $v_1, v_2 \in V$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $k_{i,1}, k_{i,2}$ wie oben, so dass

   $$v_1 = \sum_{i \in I} k_{i,1} v_i$$
   $$v_2 = \sum_{i \in I} k_{i,2} v_i.$$

Dann gilt

$$v_1 + v_2 = \sum_{i \in I} (k_{i,1} + k_{i,2}) v_i$$

und da diese Darstellung per Voraussetzung eindeutig ist gilt

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) = \sum_{i \in I} (k_{i,1} + k_{i,2}) w_i &= \sum_{i \in I} k_{i,1} w_i + \sum_{i \in I} k_{i,2} w_i \\ &= f(v_1) + f(v_2). \end{aligned}$$

Sei nun $v \in V$ und $k \in K$. Dann besitzt kv die eindeutige Darstellung

$$kv = k \sum_{i \in I} k_i v_i = \sum_{i \in I} (k k_i) v_i$$

und daher gilt

$$\begin{aligned} f(kv) = \sum_{i \in I} (k k_i) w_i &= k \sum_{i \in I} (k_i) w_i \\ &= k f(v) \end{aligned}$$

(b) [1P] *Eindeutigkeit*
Angenommen es gibt $g : V \to W$ mit $g(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$. Dann gilt für $v = \sum_{i \in I} k_i v_i$ aufgrund der K-Linearität von g

$$\begin{aligned} g(v) = g\left(\sum_{i \in I} k_i v_i \right) &= \sum_{i \in I} k_i g(v_i) \\ &= \sum_{i \in I} k_i w_i \\ &= \sum_{i \in I} k_i f(v_i) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} k_i v_i \right) \\ &= f(v). \end{aligned}$$

Also gilt $f(v) = g(v)$ für alle $v \in V$.

2. Angenommen $(v_i)_{i \in I}$ ist keine Basis. Dann ist $(v_i)_{i \in I}$ kein Erzeugendensystem, oder $(v_i)_{i \in I}$ nicht linear unabhängig.

(a) [2P] $(v_i)_{i \in I}$ *ist linear unabhängig*
Da $(v_i)_{i \in I}$ nach Annahme keine Basis von V ist, existiert $v' \in V \setminus \mathrm{Span}_K (v_i)_{i \in I}$. Nach Aufgabe 29 ist die Familie $((v_i)_{i \in I}, v')$ linear unabhängig, und kann daher nach dem allgemeinen Basisergänzungssatz zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergänzt werden.

Sei außerdem $w_i = 0$ für alle $i \in I$ und $w \in W \setminus \{0\}$. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \mathcal{B} &\to W \\ v &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathcal{B} &\to W \\ v &\mapsto \begin{cases} w & \text{falls } v = v' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus a) folgt, dass wir f und g eindeutig zu K-linearen Abbildungen $V \to W$ fortsetzen können. Diese erfüllen beide $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$, sind aber per Konstruktion verschieden.

(b) [1P] $(v_i)_{i \in I}$ *ist nicht linear unabhängig:*
Per Annahme gibt es $k_i \in K$, $k_i \neq 0$ für mindestens ein, aber nur endlich viele $i \in I$, mit

$$\sum_{i \in I} k_i v_i = 0.$$

Sei $j \in I$ mit $k_j \neq 0$ und wähle $w \in W \setminus \{0\}$ und betrachte die Familie $(w_i)_{i \in I}$ definiert durch $w_j = w$ und $w_i = 0$ für $i \neq j$. Dann gibt es keine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$. In der Tat, gilt $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I \setminus \{j\}$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 = f(0) = f\left(\sum_{i \in I} k_i v_i\right) &= \sum_{i \in I} k_i f(v_i) \\ &= k_j f(v_j) \end{aligned}$$

und wegen $k_j \neq 0$ folgt daher $f(v_j) = 0 \neq w_j$.

3. In beiden Fällen stimmt die Aussage von 1. nicht mehr. Sei zum Beispiel $K = V = W = \mathbb{R}$, $v_1 = w_1 = 1$. Die Abbildungen $V \to W$ gegeben durch $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ erfüllen $f(1) = g(1) = 1$, sind aber verschieden. Betrachten wir das Erzeugendensystem (v_1, v_2) mit $v_1 = 1, v_2 = 2$ und die Familie (w_1, w_2) mit $w_1 = 1, w_2 = 1$, so gibt es keine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2$[1], denn für K-lineares f mit $f(1) = 1$ folgt $f(2) = 2$.

[1]Genauer gibt es sogar keinen Gruppenhomomorphismus $f : V \to W$ mit diesen Eigenschaften

Zu Aufgabe 32 (3 P)

[2P] Da nach Aufgabe 30 die Familie $(\delta_x)_{x\in X}$ eine Basis von $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X,K)$ ist folgt aus Aufgabe 31.1, angewendet auf die Familie $(\psi(x))_{x\in X}$ die Existenz einer eindeutig bestimmten K-linearen Abbildung

$$\widetilde{\psi} : \mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X,K) \to V$$

mit $\widetilde{\psi}(\delta_x) = \psi(x)$. Explizit ist $\widetilde{\psi}$ durch

$$\widetilde{\psi}(f) = \sum_{x\in X} f(x)\psi(x)$$

gegeben.

[1P] Betrachten wir statt $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X,K)$ den K-Vektorraum $\mathrm{Map}(X,K)$, so gibt es weiterhin zu gegebenem $\psi : X \to V$ stets eine K-lineare Abbildung $\widetilde{\psi}' : \mathrm{Map}(X,K) \to V$ mit $\widetilde{\psi}'(\delta_x) = \psi(x)$ (denn wir können die K-lineare Abbildung $\widetilde{\psi} : \mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X,K) \to V$ vom Untervektorraum $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X,K) \subset \mathrm{Map}(X,K)$ auf $\mathrm{Map}(X,K)$ fortsetzen). Aber $\widetilde{\psi}'$ ist dann und nur dann eindeutig, wenn X endlich ist. In der Tat, ist X endlich so gilt $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X,K) = \mathrm{Map}(X,K)$ und die Aussage folgt aus dem bereits Bewiesenen. Ist X hingegen unendlich, so ist die Familie $(\delta_x)_{x\in X}$ keine Basis von $\mathrm{Map}(X,K)$ (zum Beispiel liegt die Abbildung $f(x) = 1$ für alle $x \in X$ nicht im Spann der δ_x), und die nicht-Eindeutigkeit von $\widetilde{\psi}'$ folgt aus Aufgabe 31.2.

Zu Aufgabe 33 (2 P)

Wir behaupten, dass die Familie der Restklassen $([e_i])_{i=1,2}$ der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$ das Kriterium iii) aus Satz 2.4.6 erfüllt, und damit eine Basis von V/U ist.

1. [1P] $([e_i])_{i=1,2}$ *ist linear unabhängig:*

   Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ mit $k_1[e_1] + k_2[e_2] = [0]$ gegeben. Daraus folgt, dass $k_1e_1 + k_2e_2 \in U$, also nach Definition von U sowie der Basisvektoren e_1, e_2

   $$(k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) = (k, k, k)$$

   für ein $k \in K$. Dies ist nur möglich falls $k = 0$, woraus aber auch sofort $k_1 = k_2 = 0$ folgt.

2. [1P] $(([e_i])_{i=1,2}, [w])$ *ist linear abhängig für jedes* $w \in \mathbb{R}^3$*:*

   Sei $[w] = (a, b, c) \in V/U$. Wir zeigen, dass es k_1, k_2 gibt, so dass $k_1[e_1] + k_2[e_2] = [w]$ gilt.

   Wählen wir $k_1 = a - c, k_2 = b - c$, so gilt

   $$k_1[e_1] + k_2[e_2] = [(a - c, b - c, 0)].$$

   Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass es $u \in U$ gibt mit $(a - c, b - c, 0) = (a, b, c) + u$. Dies ist der Fall für $u = (-c, -c, -c)$.