Lösungshinweise zu Blatt # 3
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. [1 P] Der Ansatz
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = id_{\mathbb{R}^2}$$
führt schnell zu einem Widerspruch.

2. [2 P]
$$AD = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 21 \\ 13 & 7 & 19 \end{pmatrix} \tag{2}$$

3. [2 P]
   (a) Nein. 'falsch' besitzt kein Inverses.
   (b) Nein. $(a_1, \ldots, a_n)$ hat kein Inverses, falls ein $a_i = 0$.

Zu Aufgabe 9 (2 P)

$$\begin{pmatrix} 10 & 50 & 123 \\ 12 & 42 & 103 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 & 1000 \\ 50 & 40 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9115 & 13476 \\ 9815 & 14916 \end{pmatrix}$$

Vamonos Pest: 225.91 Euro, Fertiplant 247.31 Euro.

Zu Aufgabe 10 (3 P) Mittels Gauß-Verfahren lässt sich die erweiterte Koeffezientenmatrix auf folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist dann $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Zu Aufgabe 11 (6 P) (Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. "$\Rightarrow$" Sei $f : A \to B$, d.h. $f \subset A \times B$ und $\forall a \in A\ \exists^! b \in B : (a, b) \in f$. Definiere $g = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}$. Sei $b \in B$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$, sodass $(a, b) \in f$ und somit $(b, a) \in g$. Da f injektiv ist, ist a eindeutig, denn sei $(a, b), (a', b) \in f$, dann folgt $a = a'$. Also ist g eine Funktion $g : B \to A$, denn $\forall b \in B\ \exists^! a \in A : (b, a) \in g$.

   Betrachte $g \circ f = \{(a, a') \in A \times A \mid \exists b \in B : (a, b) \in f \wedge (b, a') \in g\}$. Sei also $(a, a') \in g \circ f$. Da f eine Funktion ist, gibt es genau ein $b \in B$, sodass $(a, b) \in f$. Nach Konstruktion von g gilt $(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in g$. Also $(a, a') \in g \circ f$ genau dann, wenn $a = a'$. Es folgt $g \circ f = \{(a, a) \in A \times A\} = id_A$.

   Analog zeigt man $f \circ g = id_B$.

   "$\Leftarrow$" Sei $b \in B$. Dann ist $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = b$. $g(b) \in A$, und $f(g(b)) = b$, also ist f surjektiv.

   Seien $a, a' \in A$, so dass $f(a) = f(a')$. Dann ist auch

$$\begin{aligned} & g(f(a)) = g(f(a')) \\ \Leftrightarrow\quad & (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \\ \Leftrightarrow\quad & id_A(a) = id_A(a') \\ \Leftrightarrow\quad & a = a'. \end{aligned}$$

   Also ist f bijektiv.

2. Sei f bijektiv und seien $g, \tilde{g}$ Umkehrfunktionen von f. Sei $b \in B$, dann ex. genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Also ist $g(b) = g(f(a)) = a$ und $\tilde{g}(b) = \tilde{g}(f(a)) = a$, da $(g \circ f) = (\tilde{g} \circ f) = id_A$. Also $g(b) = \tilde{g}(b)$ für alle $b \in B$. Somit $g = \tilde{g}$.

Zu Aufgabe 12 (5 P) Sei nun $A \in \mathrm{Mat}(k \times l, \mathbb{R})$, $B, B' \in \mathrm{Mat}(l \times m, \mathbb{R})$ und $C \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$. Nach Definition der Matrixmultiplikation gilt dann:

1. $((AB)C)_{ij} = \sum_{r=1}^m (AB)_{ir} C_{rj} = \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^l A_{is} B_{sr}) C_{rj} =$
   $= \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^l A_{is}(B_{sr} C_{rj}) = \sum_{s=1}^l A_{is} \sum_{r=1}^m (B_{sr} C_{rj}) = (A(BC))_{ij}$, für alle $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$.

2. $(A(B + B'))_{ij} = \sum_{s=1}^l A_{is}(B + B')_{sj} = \sum_{s=1}^l A_{is}(B_{sj} + B'_{sj}) =$
   $= \sum_{s=1}^l A_{is} B_{sj} + \sum_{s=1}^l A_{is} B'_{sj} = (AB + AB')_{ij}$, für alle $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{1, \cdots, m\}$.

   $(A(rB))_{ij} = \sum_{s=1}^l A_{is}(rB)_{sj} = \sum_{s=1}^l r A_{is} B_{sj} = r \sum_{s=1}^l A_{is} B_{sj} =$
   $= r(AB)_{ij}$, für alle $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{1, \cdots, m\}$.

3. $(IA)_{ij} = \sum_{s=1}^k \delta_{is} A_{sj} = A_{ij}$, für alle $i \in \{1, \cdots, k\}$, $j \in \{1, \cdots, l\}$.

Zu Aufgabe 13 (3 P) Es ist zu zeigen: $\mathcal{L}(AB)(x) = (\mathcal{L}(A) \circ \mathcal{L}(B))(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
$\mathcal{L}(AB)(x) = (AB)x$ und $\mathcal{L}(A)(\mathcal{L}(B)(x)) = A(Bx)$. Betrachte x als $m \times 1$ Matrix. Dann folgt die Aussage aus Aufgabe 12.1.