Lösungshinweise zu Blatt # 2
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. (1 P) Ja, denn $x \in X \cap (Y \cup Z)$ gilt genau dann, wenn $x \in X$ und $x \in Y \cup Z$, also in Y oder in Z ist. Dies ist folglich genau dann der Fall, wenn x in $X \cap Y$ oder in $X \cap Z$.

   Alternativ könnte man zeigen, dass $A \wedge (B \vee C)$ logisch äquivalent ist zu $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und die Aussage über Mengen darauf zurück führen.

2. (1 P) Jede Teilmenge von $M \times M$ ist eine Relation auf M. Ist M eine n-elementige Menge, dann ist $M \times M$ eine n^2-elementige Menge und die Potenzmenge $P(M \times M)$ hat dann 2^{n^2} Elemente.

3. (1 P) Es gibt 5 solcher Äquivalenzrelationen. Die beiden trivialen Äquivalenzrelationen

   $$\Delta = \{(0,0), (1,1), (\infty, \infty)\} \text{ und } \{0, 1, \infty\} \times \{0, 1, \infty\},$$

   sowie die Äquivalenzrelationen

   $$\begin{aligned} &\Delta \cup \{(0,1), (1,0)\}, \\ &\Delta \cup \{(0,\infty), (\infty,0)\} \text{ und} \\ &\Delta \cup \{(\infty,1), (1,\infty)\}. \end{aligned}$$

4. (1 P) Zum Beispiel die Ebenen

   $$\begin{aligned} E_1 &= \{s \cdot (1,0,0,0) + t \cdot (0,1,0,0) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \text{ und} \\ E_2 &= \{s \cdot (0,0,1,0) + t \cdot (0,0,0,1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

5. (1 P) Sei $y \in [x]$ und $m \in M$ mit $m \sim y$, dann gilt, wegen der Transitivität von $\sim$,

   $$m \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow m \sim x,$$

   also $m \in [x]$.

Zu Aufgabe 5 (3 P)

(1 P) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$, ist nicht injektiv, da

$$f(1) = 0 = f(-1)$$

gilt, und auch nicht surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 \geq 0$ ist, äquivalent $x^2 - 1 \geq -1$, und daher -2 nicht im Bild von f liegt.

(2 P) Die Funktion g ist nicht injektiv. Gilt $a = 0 \vee b = 0$, dann gilt

$$g(0,0) = g(0,1) \vee g(0,0) = g(1,0).$$

Falls aber a und b nicht null sind, dann gilt $g(\frac{1}{a}, 0) = g(0, \frac{1}{b})$. Weiter ist die Funktion g surjektiv, falls a oder b von Null verschieden sind. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt dann $c = g(\frac{c}{a}, 0)$ oder $c = g(0, \frac{c}{b})$. Wenn $a = b = 0$ gilt, dann ist g allerdings nicht surjektiv, da dann $g(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Zu Aufgabe 6 (4 P)

1. (2 P) Seien f und g injektiv und $x, y \in X$ gegeben, mit

   $$g \circ f(x) = g \circ f(y),$$

   dann folgt wegen der Injektivität von g

   $$f(x) = f(y)$$

   und da f injektiv ist, folgt hieraus

   $$x = y.$$

2. (2 P) Die Komposition ist dann im Allgemeinen weder injektiv, noch surjektiv. Sei

   $$f : \{1,2\} \to \{1,2,3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2 \text{ und}$$
   $$g : \{1,2,3\} \to \{1,2\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2.$$

   Dann ist $g \circ f$ nicht injektiv, da $g \circ f(1) = g \circ f(2)$ gilt, und nicht surjektiv, da 2 nicht getroffen wird.

Zu Aufgabe 7 (6 P)

1. (3 P) Mit

   $$G := \{x + t \cdot (y - x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

   existiert eine Gerade die x und y enthält. Sei

   $$H := \{p + t \cdot u \mid t \in \mathbb{R}\}$$

eine zweite solche Gerade, dann existieren $t_x, t_y \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} x &= p + t_x \cdot u \quad \text{und} \\ y &= p + t_y \cdot u. \end{aligned}$$

Zeige $G = H$: Sei $z = x + t(y - x) \in G$, dann gilt

$$z = p + t_x \cdot u + t \cdot (t_y - t_x) \cdot u = p + (t_x + t \cdot (t_y - t_x)) \cdot u,$$

und somit ist $z \in H$, also $G \subset H$. Sei umgekehrt $z = p + t \cdot u \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z &= (x - t_x \cdot u) + t \cdot u \\ &= x + (t - t_x) \cdot u \end{aligned}$$

und da $x \neq y$, folgt $(t_y - t_x) \neq 0$ und $u = \frac{1}{t_y - t_x}(y - x)$, also

$$= x + \frac{t - t_x}{t_y - t_x}(y - x).$$

Dies zeigt $z \in G$, bzw. $H \subset G$, und insgesamt ist nun $G = H$ gezeigt.

2. (3 P) Da p' in der Menge enthalten ist, existieren $e, f \in \mathbb{R}$ mit

$$p' = p + e \cdot u + f \cdot v. \tag{1}$$

Des Weiteren sind $p' + u'$ und $p' + v'$ in der Menge enthalten, so dass $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ existieren, mit

$$\begin{aligned} p' + u' &= p + s_1 \cdot u + t_1 \cdot v \quad \text{und} \\ p' + v' &= p + s_2 \cdot u + t_2 \cdot v. \end{aligned}$$

Zieht man auf die Gleichung (1) auf jeweils auf beiden Seiten ab, dann erhält man

$$\begin{aligned} u' &= (s_1 - e) \cdot u + (t_1 - f) \cdot v \quad \text{und} \\ v' &= (s_2 - e) \cdot u + (t_2 - f) \cdot v. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 8 (6 P)

1. (2 P) Sei $x \in X$. Da R eine Funktion ist, existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$. Ebenso existiert zu y ein eindeutiges $z \in Z$, so dass $(y, z) \in S$. Zusammengenommen existiert somit genau ein $z \in Z$, mit $(x, z) \in S \circ R$.

2. (4 P) Behauptung: $S \circ R$ ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf X.

   Reflexivität: Für jedes $x \in X$ ist (x, x) ein Element von R und von S, daher auch von $S \circ R$.

   Symmetrie: Sei $(x, y) \in S \circ R$. Dann existiert ein $t \in X$, mit $(x, t) \in R$ und $(t, y) \in S$. Da R und S jeweils symmetrisch sind, folgt $(y, t) \in S$ und $(t, x) \in R$ und somit
$$(y, x) \in R \circ S = S \circ R.$$

   Transitivität: Seien $(x, y), (y, z) \in S \circ R$. Wegen der bereits gezeigten Symmetrie ist dann $(z, y) \in S \circ R$ und es existiert ein $t \in X$, mit
$$(z, t) \in R \text{ und } (t, y) \in S.$$

   Außerdem existiert wegen $(y, x) \in S \circ R = R \circ S$ ein $t' \in X$, mit
$$(y, t') \in S \text{ und } (t', x) \in R.$$

   Die Transitivität von S impliziert dann $(t, t') \in S$ und damit $(t', z) \in R \circ S$. Erneut wegen $S \circ R = S \circ R$ existiert dann ein t'', mit
$$(t', t'') \in R \text{ und } (t'', z) \in S,$$

   da R transitiv ist also $(x, t'') \in R$, und damit $(x, z) \in S \circ R$.