Lineare Algebra – Probeklausur (WS 2014/15)

Name	
Vorname	
Matrikelnr.	

Anweisungen:

- Hilfsmittel: Für die Bearbeitung sind **nur Stift und Papier** erlaubt. Benutzen Sie einen permanenten Stift (Kugelschreiber o.ä., keinen Bleistift). Es sind **keine Mobiltelefone** erlaubt. Mobiltelefonklingeln wird als Täuschungsversuch gewertet.
- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes Blatt**, das Sie abgeben, und heften Sie vor der Abgabe alle Blätter und die Klausuraufgaben mit einem Tacker zusammen.
- Die Klausur besteht aus 2 Teilen, **Teil A** und **Teil B**. Für jeden Teil gibt es 50 Punkte.
  - Die Aufgaben aus Teil A geben insgesamt 50 Punkte. **Bearbeiten Sie alle Aufgaben aus Teil A**.
  - Teil B besteht aus 3 Aufgaben zu je 25 Punkten. **Es werden nur die besten beiden Aufgaben aus Teil B gewertet**.

Für die Korrektur:

Teil A	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Gesamt
Punkte								

Teil B	B1	B2	B3	Gesamt
Punkte				

Teil A

A1 : Ankreuzfragen – Verständnis (16 P)

Kreuzen Sie jeweils **alle richtigen** Antworten an. Es können mehrere Antworten pro Frage richtig sein. Es gibt Punkte für richtig angekreuzte Kästchen und Punktabzug sonst. Für jede der 5 Teilaufgaben gibt es mindestens Null Punkte.

1. Ist die jeweils angegebene Menge mit Verknüpfung eine Gruppe?

	Ja	Nein		Ja	Nein
$(\mathbb{R}_{\geq 0}, +)$	☐	☐	$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$	☐	☐
$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$	☐	☐	$((\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \setminus \{0\}, \cdot)$	☐	☐

2. Die Abbildung

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} iz_3 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}.$$

ist

☐ injektiv. ☐ surjektiv. ☐ bijektiv.

3. Welche Dimension hat der Kern der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \ ?$$

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

4. Sei V ein 7-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

	Ja	Nein
Man kann in V sechs linear unabhängige Vektoren finden.	☐	☐
Man kann in V acht linear unabhängige Vektoren finden.	☐	☐
Es gibt in V ein Erzeugendensystem mit neun Vektoren.	☐	☐
V hat eine Basis mit neun Vektoren.	☐	☐

5. Ist die jeweils angegebene Abbildung linear?

	Ja	Nein
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y, 0)$	☐	☐
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x + 1, x - 1)$	☐	☐
$f : \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q},\ f(A) = \det(A)$	☐	☐
$f : \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^2,\ f(A) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐	☐

In den Aufgaben A2–A7 brauchen Sie Ihre Antworten nur zu begründen, wenn dies explizit verlangt ist.

A2 (5P)

Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von [3] in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Welche Elemente von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ haben kein multiplikative Inverses?

A3 (3P)

Geben Sie die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ an.

A4 (11P)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$ gegeben als $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & -7 \\ 3 & -2 & -1 & -16 \\ -4 & 2 & -2 & 22 \end{pmatrix}$.

1. Geben Sie eine Basis von $L_0 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ an.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $Ax = b$ an für $b = (3, -1, 0)$.
3. Was ist der Rang von A? Mit kurzer Begründung: Gibt es Elemente $b \in \mathbb{R}^3$, für die $Ax = b$ keine Lösung hat?

A5 (5P)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det(A)$. Was ist der Kern von $\mathcal{L}(A)$?

A6 (4P)

Berechnen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ von

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \quad , \quad f(z_1, z_2, z_3) = (iz_3, z_1 - z_2)$$

bezüglich der Basen $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

A7 (6P)

1. Geben Sie eine Definition einer linear unabhängigen Familie von Vektoren in einem Vektorraum an.
2. Sei K ein Körper und seinen V, W K-Vektorräume. Sei $f : V \to W$ K-linear und $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Zeigen Sie: Ist $(f(v_i))_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie, so ist f injektiv.

Teil B

- Sie können alle Sätze aus der Vorlesung verwenden. Ergebnisse der Übungsaufgaben dürfen Sie natürlich nur dann verwenden, wenn Sie diese nicht gerade zeigen sollen.
- Fangen Sie für jede der Aufgaben B1, B2, B3 ein **neues Blatt** an.

B1

Sei K ein Körper.

1. Sei W ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U, V \subset W$ Untervektorräume. Beweisen Sie:
   (a) $\mathrm{Span}_K(U \cup V) = \{w \in W \mid \exists u \in U, v \in V : w = u + v\}$.
   (b) $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$.
   (c) Der Quotientenvektorraum $(U + V)/U$ ist isomorph zum Quotientenvektorraum $V/(U \cap V)$.
2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 2y + z, x + y + z)$. Berechnen Sie
$$n = \dim(ker(f)) - \dim(\mathbb{R}^3/im(f))$$

B2

Sei K ein Körper.

1. Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Zeigen Sie: Ist $m \neq n$, so ist A nicht invertierbar (d.h. es gibt kein $B \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ mit $AB = I_{m\times m}$ und $BA = I_{n\times n}$).
2. Sei $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Angenommen, es gibt $m < n$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$, $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, so dass $M = BA$.
   (a) Zeigen Sie, dass dann $\det(M) = 0$.
   (b) Gilt die Aussage $M = BA \Rightarrow \det(M) = 0$ aus (a) auch für $m > n$? Beweisen Sie die Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel.
3. Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ K-linear. Zeigen Sie, dass $\det(f) = \det(f^*)$, wobei $f^* : V^* \to V^*$ die zu f duale Abbildung ist.

B3

Sei X eine Menge, K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

1. Für $x \in X$ sei $\delta_x : X \to K$ die Funktion

   $$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & : y = x \\ 0 & : y \neq x \end{cases} .$$

   Zeigen Sie: $(\delta_x)_{x \in X}$ ist eine Basis von $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K)$ (d.h. vom K-Vektorraum der Funktionen von X nach K, die nur an endlich vielen Stellen ungleich Null sind)

2. Ist $(\delta_x)_{x \in X}$ eine Basis von $\mathrm{Map}(X, K)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Zeigen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K)$ folgende universelle Eigenschaft besitzt:

   Gegeben eine Abbildung $\psi : X \to V$, so gibt es genau eine K-lineare Abbildung

   $$\widetilde{\psi} : \mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K) \to V$$

   welche $\widetilde{\psi}(\delta_x) = \psi(x)$ erfüllt.

4. Zeigen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathrm{Map}(X, K)$ folgende universelle Eigenschaft besitzt:

   Gegeben eine Abbildung $\varphi : X \to \mathrm{Hom}_K(V, K)$, so gibt es genau eine K-lineare Abbildung

   $$\widetilde{\varphi} : V \to \mathrm{Map}(X, K)$$

   welche $\varphi(x)(v) = \widetilde{\varphi}(v)(x)$ für alle $x \in X, v \in V$ erfüllt.