Übungsblatt # 9
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (3 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei $(w_1, \dots, w_n)$ eine Familie von Vektoren in K^m. Setze $A := (w_1\, w_2\, \cdots\, w_n) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $L_0 := \{x \in K^n : Ax = 0\}$. Warum ist $(w_1, \dots, w_n)$ genau dann linear unabhängig, wenn $L_0 = \{0\}$ gilt?

2. Sei $W = U \oplus V$. Warum sind die Abbildungen $p_U(w) := u$ und $p_V(w) := v$, $w = u + v$, $u \in U$, $v \in V$, eindeutig bestimmt durch die Bedingungen: $p_U : W \to U$, $p_V : W \to V$ und $\mathrm{id}_W = p_U + p_V$?

3. Seien $v_1, v_2 \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $v_1 = (x \mapsto e^x)$, $v_1 = (x \mapsto e^{-x})$. Warum sind v_1 und v_2 linear unabhängig in $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$?

Aufgabe 39 (4 P) Seien V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine $K-$lineare Abbildung. Weiter sei $U \subset \ker f$ ein Untervektorraum und π der natürliche Homomorphismus $V \to V/U$, $v \mapsto [v]$.

1. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung $\bar{f} : V/U \to W$ gibt, so dass $f(v) = (\bar{f} \circ \pi)(v)$ für jedes $v \in V$ gilt.

   Bemerkung: Die Abbildungen kann man in folgendem kommutativen Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\bar{f}$ aus Teil 1 K-linear ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 40 (3 P) Seien V, W K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie

$$V = U_1 \oplus U_2 \implies W = f(U_1) \oplus f(U_2)$$

Aufgabe 41 (5 P) Beweisen Sie Bemerkung 2.5.5:

1. Seinen X, X', Y, Y' Mengen und $f\colon X \to Y$, $b\colon Y \to Y'$, $s\colon X' \to X$ Funktionen, so dass s surjektiv und b bijektiv ist. Setzt man $f' := b \circ f \circ s$, dann gilt
$$\operatorname{im} f = b^{-1}(\operatorname{im} f')\ .$$

2. Seinen X, X', Y, Y' abelsche Gruppen und $f\colon X \to Y$, $b\colon X' \to X$, $i\colon Y \to Y'$ Gruppenhomomorphismen, so dass b bijektiv und i injektiv ist. Setzt man $f' := i \circ f \circ b$, dann gilt
$$\ker f = b(\ker f')\ .$$

Aufgabe 42 (4 P) Bestimmen Sie eine Basis des Kernes und des Bildes der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4, \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto (2x_3 - x_4,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4\,, x_3 + 2x_4) \end{aligned}$$

Aufgabe 43 (5 P) Sei W ein K-Vektorraum und $U, V \subset W$ Untervektorräume. Beweisen Sie:

1. $\operatorname{Span}_K(U \cup V) = \{w \in W \mid \exists\, u \in U, v \in V : w = u + v\}$,
(siehe Bemerkung 2.6.2 (2)).

2. Für W endlich dimensional gilt: $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.