Übungsblatt # 7
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (5 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

Im Folgenden sei V stets ein K-Vektorraum.

1. Sind $(v_i)_{i\in I}$ und $(v_j)_{j\in J}$ jeweils linear unabhängig, ist dann auch $(v_i)_{i\in I\cup J}$ linear unabhängig?
2. Sind $(v_i)_{i\in I}$ und $(v_j)_{j\in J}$ jeweils Erzeugendensysteme von V, ist dann auch $(v_i)_{i\in I\cup J}$ ein Erzeugendensystem von V?
3. Wahr oder falsch? Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, und U ein Untervektorraum von V, so gibt es eine Teilmenge $J \subset I$ so, dass $(v_i)_{i\in J}$ eine Basis von U ist.
4. Wahr oder falsch? Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, und U ein Untervektorraum von V, so ist die Familie der Restklassen $([v_i])_{i\in I}$ eine Basis von V/U.
5. Ist die Familie $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

Aufgabe 28 (4 P)

Ergänzen Sie die in der Vorlesung fehlenden Schritte im Beweis von Satz 2.4.6, d.h. zeigen Sie:

1. 2) $\Rightarrow$ 1).
2. 4) $\Rightarrow$ 3).

Aufgabe 29 (2 P)

Sei V ein K-Vektorraum, $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, und $w \in V$ so, dass $w \notin \mathrm{Span}_K(v_i)_{i\in I}$. Beweisen Sie, dass $((v_i)_{i\in I}, w)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 30 (2 P)

Sei X eine Menge und K ein Körper. Beweisen Sie, dass die Familie $(\delta_x)_{x\in X}$ wie im Beispiel in Kap. 2.4 eine Basis des K-Vektorraums $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X,K)$ ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 31 (6 P)
Seien V, W zwei K-Vektorräume.

1. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V.

   Zeigen Sie: Zu jeder Familie $(w_i)_{i\in I}$ von Vektoren in W (welche nicht notwendigerweise eine Basis bilden) gibt es genau eine K-lineare Abbildung

   $$f : V \to W$$

   mit $f(v_i) = w_i$.

2. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V und $W \neq \{0\}$.

   Zeigen Sie: Falls es zu jeder Familie $(w_i)_{i\in I}$ von Elementen aus W genau eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ gibt, so ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V.

3. Stimmt die Aussage von 1. auch noch, wenn man die K-Linearität von f weglässt? Was passiert wenn in 1. "Basis" durch "Erzeugendensystem" ersetzt wird?

Aufgabe 32 (3 P)
Sei X eine Menge und K ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K)$ folgende *universelle Eigenschaft* besitzt:

   Gegeben eine Abbildung $\psi : X \to V$, so gibt es genau eine K-lineare Abbildung

   $$\widetilde{\psi} : \mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K) \to V$$

   welche $\widetilde{\psi}(\delta_x) = \psi(x)$ erfüllt (mit δ_x wie im Beispiel in Kap. 2.4).

2. Gilt die Aussage in 1. auch, wenn man $\mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(X, K)$ durch $\mathrm{Map}(X, K)$ ersetzt?

Aufgabe 33 (2 P)
Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{(1, 1, 1)\}$. Geben Sie eine Basis des Quotientenvektorraumes V/U als $\mathbb{R}$-Vektorraum an.