Übungsblatt # 6
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (5 P)
Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Für welche $m, b \in \mathbb{R}$ sind die „linearen Funktionen“
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto m \cdot x + b$$
aus dem Schulunterricht $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen?

2. Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, mit
$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ und } f\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}?$$

3. Ist
$$\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(1,1,0,1)\} \subset \mathbb{F}_2^4$$
ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_2^4$?

4. Ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^2$?

5. Ist $\{(x_1,\ldots,x_{10}) \in \mathbb{F}_{11}^{10} \mid \sum_{i=1}^{10}[i] \cdot x_i = 0\}$ ein Untervektorraum vom $\mathbb{F}_{11}^{10}$?

Aufgabe 23 (4 P) Seien $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$ und $b \in K^3$ gegeben als

$$A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\3 & 5 & 1\\5 & 6 & -3\end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix} \quad .$$

Bestimmen Sie alle Lösungen des durch $Ax = b$ gegebenen linearen Gleichungssystems, für den Fall

1. $K = \mathbb{Q}$ und

2. $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, wobei die Einträge in A und b hier als entsprechende Restklassen zu interpretieren sind, z.B. 2 als [2].

Aufgabe 24 (2 P) Sei $r \geq 1$ und $V = Map(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Folgen. Der gleitende Mittelwert $\phi_r : V \to V$ ist definiert als

$$(\phi_r(f))\,(n) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f(n+i).$$

Man zeige, dass ϕ_r ein Endomorphismus auf V ist.

Aufgabe 25 (6 P) Sei $\mathcal{L} : Mat(m \times n, K) \to Map(K^n, K^m)$ definiert durch

$$A \mapsto (x \mapsto Ax)\,.$$

Man zeige:

1. Für jedes $A \in Mat(m \times n, K)$ ist $\mathcal{L}(A)$ eine K-lineare Abbildung.
2. $\mathcal{L} : Mat(m \times n, K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Aufgabe 26 (5 P) Sei V ein K-Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $v \in V$ gilt: $(-1).v = -v$ und $0.v = 0$. Sagen Sie bei jedem Schritt, welche definierende Eigenschaft eines Körpers oder eines Vektorraumes Sie verwenden.
2. Sei $U \subset V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) U ist ein Untervektorraum von V.
   (b) U ist nicht leer und für alle $r \in K$ und $u, v \in U$ gilt:

$$r.u \in U \text{ und } u + v \in U.$$

Aufgabe 27 (2 P)
Geben Sie ein Beispiel für einen Körper K, zwei K-Vektorräume V, W und einen Gruppenhomomorphimus

$$f : (V, +) \to (W, +)$$

der unterliegenden abelschen Gruppen, welcher nicht K-linear ist.