Übungsblatt # 5
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei G eine Gruppe und U, V Untergruppen von G. Ist dann auch $U \cup V$ eine Untergruppe von G?
2. Warum impliziert die Injektivität eines Gruppenhomomorphismus f, dass $\ker f = \{e\}$ gilt?
3. In einem Ring mit Eins sei $1 = 0$. Warum gilt dann $R = \{0\}$?
4. Wieso ist $(\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ mit $a \tilde{+} b := a \cdot b$ und $a \tilde{\cdot} b := a + b$ kein Ring?

Aufgabe 18 (2 P)
Die Fibonacci-Folge ist eine berühmte Zahlenfolge, benannt nach dem italienischen Mathematiker Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt. Die Folge wird rekursiv definiert, wobei man zwei Startwerte $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ festlegt:

$$f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Identität gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1 \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Aufgabe 19 (5 P)
Sei R ein Ring.

1. Für $a \in R$ sei $L_a : R \to R$ gegeben durch $L_a(b) := ab$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
   (a) R ist nullteilerfrei.
   (b) Für alle $a \in R \setminus \{0\}$ ist L_a injektiv.
2. Sei überdies R nullteilerfrei, kommutativ, mit Eins, wobei $1 \neq 0$, und sei R eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass dann R ein Körper ist.

   Hinweis: Sei X eine endliche Menge. Dann gelten für eine Abbildung $f\colon X \to X$ die Beziehungen f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv.
3. Bleibt die Aussage in 2. wahr, wenn R keine endliche Menge ist?

Bitte wenden.

Aufgabe 20 (7 P)
Betrachten Sie $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Aus Satz 1.4.14 wissen wir, dass $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ mit $[a] + [b] = [a + b]$ eine abelsche Gruppe ist.

1. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $\cdot\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ existiert mit $[a] \cdot [b] = [ab]$.

   Hinweis: Prüfen Sie auf Repräsentantenunabhängigkeit.

2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ring ist.

3. Sei nun p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

4. Was ist $[4]^{-1}$ in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$?

Aufgabe 21 (2 P)
Stellen Sie die Verknüpfungen von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, wie in Aufgabe 20 definiert, mithilfe von Multiplikation- und Additionstafel wie unten dar. Füllen Sie die Tafeln nur mit $[0], [1], [2]$ und $[3]$.

$x =\backslash\ y =$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$				
$[1]$	$x + y$	bzw.	$x \cdot y$	
$[2]$				
$[3]$				

Aufgabe 22 (4 P)
Zeigen Sie, dass die komplexe Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper sind.

Bemerkung: Nehmen Sie die Tatsache, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe ist, als gegeben.