Übungsblatt # 4
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (5 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Geben Sie ein Beispiel für eine 2×1 Matrix A und eine 1×2 Matrix B an, das $BA = I_{1\times1}$ und $AB \neq I_{2\times2}$ erfüllt.

2. Wahr oder falsch? Eine Untergruppe einer abelschen Gruppe ist ebenfalls eine abelsche Gruppe.

3. Wahr oder falsch? Ist A eine abelsche Gruppe und $f : A \to B$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist auch B eine abelsche Gruppe.

4. Sei $n \geq 3$, und seien $f, g \in S_n$ die Bijektionen definiert durch
$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(m) = m \text{ für alle } m \neq 1, 2$$
$$g(1) = 3, g(3) = 1, g(m) = m \text{ für alle } m \neq 1, 3.$$
Gilt dann $f \circ g = g \circ f$?

5. Warum ist $\sqrt{2}\mathbb{Q}^* := \{\sqrt{2}p \mid p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ keine Untergruppe von $\mathbb{R}^*$?

Aufgabe 14 (5 P)

1. Seien $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Dann ist per Definition $AB \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass sogar $AB \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt.

   Hinweis: Versuchen Sie, das Inverse von AB durch die Inversen von A und B auszudrücken. Achten Sie dabei darauf, dass Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

2. Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit der Verknüpfung $(A, B) \mapsto AB$ eine Gruppe ist, indem Sie nachweisen, dass die drei definierenden Eigenschaften einer Gruppe erfüllt sind.

Bitte wenden.

Aufgabe 15 (4 P)
Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \det : \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto ad - bc. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.
2. $\det(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^*$

Folgern Sie, dass die Einschränkung von det auf $GL(2, \mathbb{R})$,

$$\det : \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* ,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 16 (5 P)
Sei $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und det wie in Aufgabe 15. Zeigen Sie: Ist $\det(A) \neq 0$, so ist A invertierbar. Geben Sie außerdem A^{-1} im Fall $\det(A) \neq 0$ explizit an.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Matrix $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ mit $AB = BA = I$ indem Sie die linearen Gleichungssysteme $A \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösen.

Bemerkung: In Aufgabe 15.2 wurde die Umkehrung „Ist A invertierbar, so gilt $\det(A) \neq 0$“ bewiesen.

Aufgabe 17 (5 P)
Gegeben sei die Menge

$$M := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\} \subset \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Untergruppe von $\mathbb{R}^*$ ist, indem Sie folgende Teilaufgaben bearbeiten:

1. Zeigen Sie: Es gilt $M \subset \mathbb{R}^*$, d.h. $0 \notin M$. Ferner gilt $1 \in M$.
2. Zeigen Sie: Sind $x, y \in M$, so ist auch $xy \in M$.
3. Geben Sie zu $x \in M$ explizit das inverse Element x^{-1} an, und folgern Sie, dass $x^{-1} \in M$ gilt.