Übungsblatt # 3
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (5 P)
Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Warum ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar?
   (In der Vorlesung wurde angekündigt, dass nur quadratische Matrizen invertierbar sein können. Dies hatten wir nicht begründet und kann hier nicht als Begründung verwendet werden.)

2. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie $A \cdot D$ und $B \cdot A$

3. Welche der folgenden Mengen bilden mit den angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe?
   (a) $\{$wahr, falsch$\}$ mit der Konjunktion $\wedge$
   (b) $\mathbb{R}^n$ mit der Multiplikation $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$

Aufgabe 9 (2 P) In einem Gewächshaus werden Paprika und Tomaten angebaut. Die Paprikagewächse benötigen pro Monat 600 Liter Wasser, 50 Liter Düngemittel und 5 Liter Pestizide, wohingegen die Tomatengewächse 1000 Liter Wasser, 40 Liter Düngemittel und 12 Liter Pestizide benötigen.
Sie möchten eine Firma beauftragen, die die Pflanzen mit den benötigten Rohstoffen versorgt. Die Firma Vamonos Pest verlangt 10 Cent pro Liter Wasser, 50 Cent pro Liter Düngemittel und 123 Cent pro Liter Pestizid, wohingegen die Firma Fertiplant 12 Cent pro Liter Wasser, 42 Cent pro Liter Düngemittel und 103 Cent pro Liter Pestizid veranschlagt.
Bestimmen Sie wie in der Vorlesung mittels Matrixmultiplikation jeweils den Preis pro Pflanzenart bei den verschiedenen Firmen. Welche Firma ist insgesamt am Günstigsten?

Bitte wenden.

Aufgabe 10 (3 P) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & -7 \\ 3 & -2 & -1 & -16 \\ -4 & 2 & -2 & 22 \\ 5 & -3 & 0 & -27 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

Aufgabe 11 (6 P) Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. In der Vorlesung hatten wir definiert, dass eine Funktion genau dann bijektiv ist, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

1. Zeigen Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn es eine Funktion $g : B \to A$ gibt, so dass
$$f \circ g = \mathrm{id}_B, \quad g \circ f = \mathrm{id}_A .$$
Die Funktion g nennt man *Umkehrfunktion* von f.
2. Sei f bijektiv. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion von f eindeutig ist, d.h. falls g und $\tilde{g}$ Umkehrfunktionen sind, dann folgt $g = \tilde{g}$.

Aufgabe 12 (5 P) Sei $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(k \times l, \mathbb{R})$, $B, B' \in \mathrm{Mat}(l \times m, \mathbb{R})$, $C \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und $r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

1. $(AB)C = A(BC)$,
2. $A(B + B') = AB + AB'$, $A(rB) = r(AB)$,
3. $IA = A$.

Aufgabe 13 (3 P) Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{L} : \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\mathcal{L}(M)(x) := Mx$ für $M \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$, wie in der Vorlesung definiert.

Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{L}(AB) = \mathcal{L}(A) \circ \mathcal{L}(B)$$
für alle $A \in \mathrm{Mat}(k \times l, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(l \times m, \mathbb{R})$ gilt.