Übungsblatt # 2
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (5 P)
Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Gilt $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ für alle Mengen X, Y, Z?
2. Wieviele Relationen gibt es auf einer n-elementigen Menge?
3. Beschreiben Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $\{0, 1, \infty\}$.
4. Geben Sie ein Beispiel von zwei Ebenen im $\mathbb{R}^4$, die sich in genau einem Punkt schneiden.
5. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $[x] := \{y \in M \mid y \sim x\}$. Man zeige:
$$\forall y \in [x], m \in M : (y \sim m \Rightarrow m \in [x])$$

Aufgabe 5 (3 P)
Beweisen oder widerlegen Sie die Injektivität und Surjektivität der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2 - 1, \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto ax + by, \text{ für } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (4 P) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Entscheiden Sie, ob die Komposition $g \circ f$ injektiv oder surjektiv ist, falls

1. f und g injektiv sind, oder
2. f injektiv und g surjektiv ist.

Geben Sie einen Beweis (oder ein Gegenbeispiel) für ihre Behauptung.

Bitte wenden.

Aufgabe 7 (6 P)

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, mit $x \neq y$. Man zeige, dass es genau eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ gibt, die x und y enthält.

2. Es seien mit $p, p', u, u', v, v' \in \mathbb{R}^n$ zwei verschiedene Darstellungen

$$\{p + t \cdot u + s \cdot v \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{p' + t \cdot u' + s \cdot v' \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

einer Ebene gegeben. Man zeige, dass dann $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} u' &= a \cdot u + b \cdot v, \\ v' &= c \cdot u + d \cdot v \quad \text{und} \\ p' &= p + e \cdot u + f \cdot v \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 8 (6 P)
Es seien $R \subset X \times Y, S \subset Y \times Z$ Relationen und weiter sei $S \circ R \subset X \times Z$ definiert als

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}.$$

Begründen Sie:

1. Sind R und S Funktionen, dann ist $S \circ R$ eine Funktion.

2. Sei $X = Y = Z$ und seien R und S Äquivalenzrelationen mit

$$S \circ R = R \circ S.$$

Dann ist $S \circ R$ auch eine Äquivalenzrelation.