Übungsblatt # 10 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (2 P)

Es sei p eine Primzahl und L/K eine Körpererweiterung mit $[L:K] = p$. Zeigen Sie, dass $L = K(a)$ für alle $a \in L, a \notin K$.

Aufgabe 2 (4 P)

Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Es sei $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $m_{\alpha,\mathbb{Q}}$
2. Geben Sie ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ mit $P(\alpha) = \alpha^{-1}$ an.

Aufgabe 3 (4 P)

Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Es seien $a = \sqrt[3]{2}$ und $b = \sqrt[4]{5}$. Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(a,b) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 4 (2 P)

Sei K ein Körper und sei p unzerlegbar und normiert in $K[X]$. Dann ist $L := K[X]/(p)$ ein Erweiterungskörper von K.

Was ist das Minimalpolynom des Elementes $X + (p) \in L$ über K? Was ist der Grad von L/K?

Aufgabe 5 (5 P)

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

1. Jedes $f \in K[X]$, $f \notin K$, besitzt eine Nullstelle in K.
2. Jedes $f \in K[X]$, $f \notin K$, ist ein Produkt der Form $f = c(X - a_1) \cdots (X - a_n)$ mit $c, a_i \in K$.
3. Die Menge der normierten, unzerlegbaren Polynome in $K[X]$ ist $\{X - a | a \in K\}$.
4. Ist L/K algebraisch, so gilt $L = K$.

Bitte wenden.

Aufgabe 6 (2 P)
Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie: K ist nicht algebraisch abgeschlossen.

Aufgabe 7 (5 P)
Zeigen Sie:

1. Die Menge $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f \text{ ist unzerlegbar } \}$ ist abzählbar.
2. Die Menge $K = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist abzählbar.
3. K aus Teil 2 ist ein Körper.