Übungsblatt # 08 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (3 P)

Hintergrund: Der chinesische Restsatz für $\mathbb{Z}$: Seien $n_1, n_2, \ldots n_r$ ganze Zahlen, so dass $ggT(n_i, n_j) = 1$ für $i \neq j$ gilt. Dann ist

$$\mathbb{Z}/(n_1 n_2 \cdots n_r \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$$

$$\underline{x} \longmapsto (\underline{x}, \ldots, \underline{x})$$

ein Ringisomorphismus. (Siehe Webseite für mehr Details.)

Aufgabe: Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass $A \cong \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ für geeignete $m_i \geq 2$ mit $m_i | m_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots r - 1$.

Anmerkung: Man kann weiter zeigen, dass die m_i eindeutig durch A festgelegt werden. Dies gibt eine alternative Weise die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen zu beschreiben.

Aufgabe 2 (5 P)
Es sei $R = \mathbb{Z} + i\sqrt{6}\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Sei $x = 2 + i\sqrt{6}$. Zeigen Sie:

1. R ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.
2. x ist unzerlegbar in R.
3. x ist nicht prim in R.

Hinweis: Die Abbildung $R \to \mathbb{Z}$ $z \mapsto |z|^2$ ist multiplikativ.

Aufgabe 3 (5 P)
Sei A ein kommutativer Ring, und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Zeigen Sie:

1. I ist prim $\iff$ A/I ist ein Integritätsbereich.
2. I ist maximal $\iff$ A/I ist ein Körper.
3. Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (3 P)
Sei A ein Integritätsbereich und sei K ein Körper. Sei $\phi : A \to K$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Zeigen Sie: K enthält einen Unterkörper (d.h. einen Unterring, der ein Körper ist), der zu $Q(A)$ isomorph ist.

Aufgabe 5 (3 P)
Sei A ein Ring und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Sei $\pi : A \to A/I$ die natürliche Projektion. Zeigen Sie: die Abbildung

$$\{ \text{ Ideale von A/I } \} \to \{\text{Ideale von } A, \text{ die } I \text{ enthalten}\}$$

$$J \mapsto \pi^{-1}(J)$$

ist wohldefiniert und eine Bijektion.

Aufgabe 6 (2 P)
Beweis oder Gegenbeispiel: Ein endlicher Integritätsbereich ist ein Körper.

Aufgabe 7 (3 P) Es gilt: { Kommutative Ringe } $\supset$ { Integritätsbereiche } $\supset$ {Faktorielle Ringe} $\supset$ {Hauptidealringe}. Geben Sie für jede Klasse von Ringen ein Beispiel an, das nicht in der nächsten liegt.