Übungsblatt # 07 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (4 P)
Sei $R \subseteq M_2(\mathbb{C})$ die Teilmenge aller Elemente der Form

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

wobei $z, w \in \mathbb{C}$.

1. Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes $0 \neq r \in R$ invertierbar ist. Ist R ein Körper?

Aufgabe 2 (4 P)
Sei R ein Ring, und sei $r \in R$. Wir definieren zwei Untermengen von R: $r \cdot R = \{rx | x \in R\}$ und $R \cdot r = \{xr | x \in R\}$.

1. Zeigen Sie, dass $r \cdot R$ das kleinste Rechtsideal von R ist, das r enthält. (Eine analoge Behauptung gilt natürlich auch für $R \cdot r$).
2. Berechnen Sie $r \cdot R$ und $R \cdot r$ für $R = M_2(\mathbb{C})$ und $r = e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (3 P)
Sei K ein Körper, und sei $R = M_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\{0\}$ und R die einzigen beidseitigen Ideale von R sind.

Aufgabe 4 (6 P) Sei R ein kommutativer Ring. Die Menge der nilpotenten Elemente in R ist

$$N(R) := \{x \in R | \, \exists \, n \in \mathbb{N} : \, x^n = 0\}$$

Zeigen Sie:

1. $N(R)$ ist ein Ideal in R.
2. Ist ϵ eine Einheit in R und $x \in N(R)$, so ist auch $\epsilon + x$ eine Einheit.
3. Beschreiben Sie N(R) für $R = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, wobei q eine Primzahlpotenz ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 5 (2 P)

Seien R und S Ringe, und sei $\phi : R \to S$ eine Abbildung, die die Bedingungen $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ und $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ für $x, y \in R$ erfüllt. Muss ϕ ein Ringhomomorphismus sein? Beweis oder Gegenbeispiel.

Aufgabe 6 (5 P)

Sei R ein Ring, und sei $\phi : \mathbb{Z} \to R$ die Abbildung $n \mapsto 1 + 1 + \ldots 1$ (eine n-mal Summe von 1).

1. Nehmen Sie an, dass R ein Integritätsbereich ist. Zeigen Sie, dass $Ker(\phi) = (p)$, wobei p eine Primzahl oder 0 ist. (p heisst die *Charakteristik* von R).

2. Nehmen Sie an, dass R kommutativ ist und dass $Ker(\phi) = (p)$ für eine Primzahl p gilt. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi : R \to R$, $x \mapsto x^p$ ein Ringhomomorphismus ist.