Übungsblatt # 04 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (4 P)

1. Durch welchen Gruppenhomomorphismus spaltet die kurze exakte Sequenz $1 \to A_n \xrightarrow{\iota} S_n \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{\pm 1\} \to 1$? Was ist γ in dem resultierenden semidirekten Produkt $S_n = A_n \rtimes_\gamma \{\pm 1\}$.

2. Sei $S = \{\, (ijk) \,|\, i \neq j \neq k \neq i, 1 \leq i, j, k \leq n \,\} \subseteq A_n$. Zeigen Sie, dass S A_n erzeugt.

Aufgabe 2 (4 P)
Sei G eine Gruppe.

1. Sei I eine Menge, und für jedes $i \in I$ sei H_i eine Untergruppe von G. Warum ist der Schnitt $S = \bigcap_{i \in I} H_i$ eine Untergruppe von G?

2. Sei H eine Untergruppe von G. In Teil 1, setze $I = G$ und $H_i = iHi^{-1}$ für $i \in I$. Zeigen Sie, dass der Schnitt S aus Teil 1 eine normale Untergruppe von G ist, und dass $S \subset H$. In welchem Sinn ist S maximal?

Aufgabe 3 (4 P)
Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

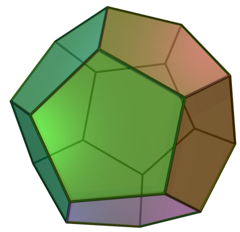
1. Wir wollen G auf G/H durch $(g, xH) \mapsto gxH$ wirken lassen. Warum ist die Abbildungsvorschrift repräsentatenunabhängig? Warum definiert sie eine Wirkung? Wann ist diese Wirkung transitiv?

2. Sei $N \leq G$ eine normale Untergruppe. Zeigen Sie, dass die Wirkung von N auf G/H genau dann trivial ist, wenn $N \subseteq H$ gilt.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (2 P)

Berechnen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe eines regelmäßiges Pentagon-dodekaeders: (Bild: wikipedia)



Aufgabe 5 (7 P)

Beweis oder Gegenbeispiel: Für jede Primzahl p ist

1. jede Gruppe der Ordnung p abelsch.
2. jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch.
   Hinweis: Warum hat eine solche Gruppe ein nicht triviales Zentrum?
3. jede Gruppe der Ordnung p^3 abelsch.

Aufgabe 6 (3 P)

Sei $G \neq \{e\}$ eine endliche Gruppe und sei p die kleinste Primzahl die $|G|$ teilt. Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von Index p. Zeigen Sie, dass H eine normale Untergruppe ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung von H auf G/H.