Übungsblatt # 01 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (10 P)

1. Sei G eine Gruppe wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie: e, $(-)^{-1}$ sind eindeutig, $(g^{-1})^{-1} = g$, $e^{-1} = e$, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$
2. Sei H eine weitere Gruppe und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:
   - $\varphi(e) = e$, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.
   - $\mathrm{im}(\varphi)$ ist eine Untergruppe, $\ker(\varphi)$ ist eine normale Untergruppe.
   - Die Abbildung $\psi : G \to G$ $g \mapsto g^{-1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus dann und nur dann, wenn G abelsch ist.
3. Es gibt eine alternative Definition einer Gruppe, in der man nur eine einseitige Eins (d.h. z.B. $g \cdot e = g$, aber $e \cdot g = g$ wird nicht separat gefordert) und ein einseitiges Inverses fordert. Wie geht das genau?

Aufgabe 2 (6 P)

Für $H \leq G$ eine (nicht unbedingt normale) Untergruppe und $x \in G$ nennt man die Menge $xH = \{xh|h \in H\}$ die *x enthaltende Linksnebenklasse von H*. Man schreibt $G/H = \{xH|x \in G\}$.

1. Sei $N \leq G$ eine normale Untergruppe. Prüfen Sie, dass die Operationen auf der Faktorgruppe G/N (wie in der Vorlesung angegeben) wohldefiniert sind und eine Gruppe ergeben.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine nicht normale Untergruppe $H \leq G$, so dass die Operationen auf G/H nicht wohldefiniert sind (und erklären Sie warum).

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (4 P)
Klassifizieren Sie durch Analyse von Multiplikationstabellen alle Gruppen mit vier Elementen bis auf Isomorphie.

Aufgabe 4 (2 P)
Sei G eine Gruppe, so dass für jedes $g \in G$ die Gleichheit $g^2 = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 5$^{(*)}$ (2 P) Sei G eine endliche Gruppe, die eine gerade Anzahl von Elementen hat. Zeigen Sie: Es gibt $e \neq g \in G$, so dass $g^2 = 1$ gilt.

Präsenzaufgaben

Hintergrund: Für $g \in G$ definieren wir die *Ordnung von g* als die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die $g^n = e$ gilt. Falls kein solches n existiert, sagt man, dass g unendliche Ordnung hat. Wir schreiben $ord(g)$ für die Ordnung von g.

1. Sei G eine Gruppe, und $g \in G$ ein Element von endlicher Ordnung n. Zeigen Sie, dass $g^m = e$ genau dann, wenn $n|m$ (Hinweis: schreiben Sie erst $m = tn + k$ mit $k < n$).

2. Sei G eine Gruppe, $a, b \in G$ zwei Elemente. Nehmen Sie an, dass $ab = ba$ gilt, und $ord(a)$ und $ord(b)$ endlich sind. Zeigen Sie dass
$$(ab)^{kgV(ord(a), ord(b))} = e \ .$$

3. Finden Sie zwei Elementen $\pi, \sigma \in S_{2n}$, so dass $ord(\pi) = ord(\sigma) = 2$ und $ord(\pi\sigma) = n$ gilt.

4. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ zwei Matrizen in $GL_2(\mathbb{Q})$. Zeigen Sie, dass $ord(A) = 4$, $ord(B) = 3$ und $ord(AB) = \infty$ gilt.

5. Zeigen Sie, dass für jede zwei Elementen a, b in einer Gruppe G $ord(ab) = ord(ba)$ gilt.

6. Sei G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von G normal sind.

7. Sei X eine Menge, und sei $G = P(X)$ die Potenzmenge von X. Für $A, B \in G$ definieren wir $A \cdot B = A \triangle B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Zeigen Sie dass G mit dieser Operation eine abelsche Gruppe ist, wobei jedes Element außer der Eins Ordnung 2 hat.