Lösungshinweise zum Übungsblatt 9
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist ein Polynom irreduzibel genau dann, wenn es Grad 1 hat. Nun ist $\mathbb{C}[X]$ ein Hauptidealring, womit jedes irreduzible Element prim ist. In jedem Integritätsbereich ist ein Primelement auch irreduzibel, so dass in $\mathbb{C}[X]$ ein Element irreduzibel ist genau dann, wenn es prim ist. Da alle angegebenen Polynome normiert sind, haben wir ein Vertretersystem.

2. Gilt $p^m x = 0 = p^n y$, dann ist $p^{\max(m,n)}(x+y) = 0$. Ist $x \in M_p$, so ist offensichtlich auch $rx \in M_p$ für alle $r \in R$ (insbesondere auch $-x = (-1) \cdot x$).

3. Nein, zum Beispiel könnten wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ betrachten. Offensichtlich teilen sich die charakteristischen Polynome nicht, aber $m_A = m_B = (X-1)(X-2)$.

4. Wir erinnern uns zunächst, dass für ein $v = \sum_{i=0}^k X^i a_i \in K[X]^n$ (wobei $a_i \in K^n$) gilt: $F(v) = Av - Xv$ und $Gv = \sum_{i=0}^k A^i a_i$. Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} GF(v) = G(Av - Xv) = G(Av) - G(Xv) &= G(\sum_{i=0}^k X^i A a_i) - G(Xv) \\ &= \sum_{i=0}^k A^{i+1} a_i - XG(v) = \sum_{i=0}^k A^{i+1} a_i - X(\sum_{i=0}^k A^i a_i) = \\ &= \sum_{i=0}^k A^{i+1} a_i - \sum_{i=0}^k A^{i+1} a_i = 0. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 45 (4 P)
Rechnen ergibt $P_A = -(X-3)(X+1)^2$ [1 P] und $m_A = (X-3)(X+1)$ [1 P]. Der Gauß-Algorithmus liefert, dass $(-1, 1, 5)$ Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist [1 P], und e_3 sowie $(-2, 1, 0)$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert -1 [1 P].

Zu Aufgabe 46 (3 P)

1. [1 P] Wir wissen nach Aufgabe 31 auf Blatt 6, dass $A - \mathrm{I}_{n\times n}$ ähnlich ist zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonale. Folglich ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix D mit Einsen auf der Diagonale.

2. [2 P] Nach 1. gilt $P_A = (1-X)^n$. Ist $m_A = X - 1$, dann ist $D = \mathrm{I}_{n\times n}$ und damit ist A diagonalisierbar. Ist hingegen A diagonalisierbar, dann ist $D = \mathrm{I}_{n\times n}$, und damit $m_A = X - 1$.

Zu Aufgabe 47 (6 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. [1 P] $(\mathrm{id} - p)^2 = \mathrm{id} - 2p + p^2 = \mathrm{id} - p$.

2. [1 P] Sei $0 \neq v$ mit $p(v) = \lambda v$. Dann: $\lambda v = p(v) = p^2(v) = \lambda p(v) = \lambda^2 v$. Diese Gleichung ist natürlich erfüllt, wenn $\lambda = 0$ ist. Ist $\lambda \neq 0$, können wir mit λ^{-1} multiplizieren und erhalten $v = \lambda v$, d.h. $\lambda = 1$. Insgesamt ist also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

3. [2 P] Sei $v \in V$. Dann ist $v = (v - p(v)) + p(v) \in \ker(p) + \mathrm{im}(p)$. Andererseits ist $\ker(p) \cap \mathrm{im}(p) = 0$: ist $x \in \ker(p) \cap \mathrm{im}(p)$, dann existiert ein y mit $p(y) = x$ und $p(x) = 0 = p^2(y) = p(y) = x$. Folglich erhalten wir: $V = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$. Wir erinnern uns an die nach Definition geltende Gleichheit $\mathrm{Eig}(p, 0) = \ker(p)$.

   Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Eig}(p, 1) = \mathrm{im}(p)$. Die Gleichung $p(p(w)) = p(w)$ zeigt die Inklusion $\supseteq$. Für jedes $u \in \mathrm{Eig}(p, 1)$ gilt $u = p(u)$, also gilt auch die Inklusion $\subseteq$.

   Insgesamt erhalten wir also $V = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p) = \mathrm{Eig}(p, 0) \oplus \mathrm{Eig}(p, 1)$. Damit ist p diagonalisierbar.

4. [2 P] Ist $0 \neq v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, dann gilt $\lambda^2 v = f^2(v) = af(v) = a\lambda v$. Folglich können die Eigenwerte nur 0 oder a sein.

   Wir setzen nun $g = a^{-1}f$ und bemerken, dass $g^2 = g$ ist. Damit ist g eine Projektion, folglich diagonalisierbar, also gilt dies auch für f. In der Tat, ist $0 \neq v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von f, also $f(v) = \lambda v$, dann gilt für ein beliebiges $\alpha \in K^*$ und $g = \alpha f$ die Gleichung $g(v) = \lambda\alpha v$, d.h. v ist ein Eigenvektor von g zum Eigenwert $\lambda\alpha$, woraus sofort folgt, dass die Eigenvektoren von f und αf gleich sind.

   Alternativ verfährt man wie bei der vorherigen Teilaufgabe: für ein beliebiges $v \in V$ zeigt die Gleichung $v = (v - a^{-1}f(v)) + a^{-1}f(v)$, dass $V = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$ und eine ähnliche Rechnung wie vorher, dass sogar $V = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(f)$ gilt. Es bleibt dann zu zeigen, dass $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Eig}(f, a)$. Die Inklusion $\subseteq$ folgt sofort aus $f^2 = af$, und $\supseteq$ wird genauso wie oben gezeigt.

Zu Aufgabe 48 (5 P)

1. [2 P] Wir zeigen zunächst mit Induktion, dass wenn v_i Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i von f sind und $u \in U$ ein Vektor ist mit $u = v_1 + \ldots + v_k$, dann schon alle v_i in U sind. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage wahr für $k-1$. Wir haben $f(u) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in U$ und $\lambda_1 u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_1 v_k \in U$, also ist

   $$f(u) - \lambda_1 u = (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_1)v_k \in U.$$

   Nach Induktion sind $v_2, \ldots, v_k \in U$, also auch $v_1 = u - (v_2 + \ldots + v_k)$.

   Damit können wir aber schließen, dass $U = \oplus_{i \in I}(\mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \cap U)$. In der Tat, jedes $u \in U$ kann als eine endliche Summe von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten geschrieben werden, die ja alle in U liegen müssen, d.h. die Räume $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \cap U$, $i \in I$, erzeugen U. Andererseits schneiden sich all diese Unterräume nur in der Null.

2. [1 P] Sei $0 \neq v$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, also $f(v) = \lambda v$. Dann gilt auch $gf(v) = \lambda g(v) = f(g(v))$, d.h. $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist g-invariant. Da g diagonalisierbar ist, ist die Einschränkung von g auf $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ebenfalls diagonalisierbar nach der vorherigen Teilaufgabe. Dieses Argument können wir für jeden Eigenwert von f durchführen und erhalten damit die Behauptung.

3. [2 P] Sei $n = \dim_K(V)$. Da $\dim_K(\mathrm{End}_K(V)) < \infty$, existiert ein m-dimensionaler Unterraum U von $\mathrm{End}_K(V)$, der alle f_i enthält und wir können eine endliche Teilmenge der f_i auswählen, die eine Basis $\mathcal{B}$ von U ist. Die vorherige Teilaufgabe verbunden mit einer Induktion zeigt die Behauptung für $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$, nämlich die Existenz einer Basis von V bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren zu den Elementen von $\mathcal{B}$. Bezeichne diese Basis von V mit $\mathcal{E}$. Dann ist $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(b_j) = D_j$ eine Diagonalmatrix für alle $1 \leq j \leq m$. Für ein beliebiges $i \in I$ schreiben wir nun $f_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j$ (für irgendwelche $\alpha_j \in K$) und sehen, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_i)$ als Linearkombination der D_j ebenfalls eine Diagonalmatrix ist.

   Vorsicht: einfach nur Induktion über I durchzuführen funktioniert nicht, da wir I nicht als abzählbar vorausgesetzt haben.

Zu Aufgabe 49 (2 P) Sei $\Phi\colon V \to W$ eine $K[X]$-lineare Abbildung. Dann gilt $\Phi(Xp) = X\Phi(p)$ für alle $p \in V$. Dies übersetzt sich in $\Phi(fp) = g\Phi(p)$, da ja Multiplikation mit X der Anwendung von f auf V bzw. von g auf W entspricht. Die Umkehrung ist analog.