Lösungshinweise zu Blatt # 3
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SoSe 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. Es ist noch zu zeigen, dass die durch $u_i := \phi_A T^{-1} e_i$, für $i = 1, \ldots, n$, gegebene Basis aus Eigenvektoren von F besteht. M ist eine darstellende Matrix von F, also $M = M_{\mathcal{A}}(F)$ für eine Basis $\mathcal{A}$ von V. Dann gilt $F = \mathcal{L}_A(M)$ und es ist

$$\begin{aligned} Fu_i &= \phi_A \circ \mathcal{L}(M) \circ \phi_A^{-1} u_i \\ &= \phi_A \circ \mathcal{L}(M) \circ \phi_A^{-1} \phi_A T^{-1} e_i \\ &= \phi_A \left(M T^{-1} e_i \right) \\ &= \phi_A \left(T^{-1} D e_i \right) \\ &= d_i \cdot \phi_A \left(T^{-1} e_i \right) \\ &= d_i \cdot u_i, \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

2. [1 P] Weil für $i \neq j$ offensichtlich $W_j \subset \operatorname{span}\left(\bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} W_j \right)$ gilt und für den Schnitt mit W_i daher

$$W_i \cap W_j \subset W_i \cap \operatorname{span}\left(\bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} W_j \right) = 0$$

folgt.

[1 P] Umgekehrt liefert das 3-Tupel

$$(\operatorname{span}(e_1), \operatorname{span}(e_1 + e_2), \operatorname{span}(e_2))$$

von Untervektorräumen des $\mathbb{R}^2$ ein Gegenbeispiel.

3. Seien $p, q \geq 2$ zwei verschiedene natürliche Zahlen und $R = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Dann gilt für die Polynome $f = pX + 1$ und $g = qX + 1$ in $R[X]$, dass

$$\deg(fg) = 1 < 2 = \deg(f) + \deg(g).$$

4. Falls $p = \sum_{i=0}^{\deg(p)} p_i X^i$ nicht das Nullpolynom ist, dann ist der führende Koeffizient $a_{\deg(p)+\deg(q)}$ von pq gleich $q_{\deg(q)} \cdot p_{\deg(p)}$ und ebenfalls ungleich Null, da sonst $0 = q_{\deg(q)}^{-1} \cdot q_{\deg(q)} \cdot p_{\deg(p)} = p_{\deg(p)}$ ein Widerspruch wäre. Falls p das Nullpolynom ist, dann gilt $-\infty = -\infty + n$, für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, per Konvention.

Zu Aufgabe 10 (2 P) Sei

$$v \in \operatorname{Eig}(f,\lambda) \cap \operatorname{span}\left(\bigcup_{\mu \in K\setminus\{\lambda\}} \operatorname{Eig}(f,\mu) \right).$$

Dann lässt sich v als endliche Summe

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

schreiben, wobei jedes v_i ein Eigenvektor zu einem Eigenwert $\mu_i \neq \lambda$ von f ist und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ paarweise verschieden sind. Damit folgt $v = 0$ aus Satz 4.1.15.

Zu Aufgabe 11 (3 P) Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $M = M_{\mathcal{A}}(F)$. Nach Satz 2.8.10 ist dann $M_{\mathcal{A}*}(F^*) = M^t$ und da dann $(M - \lambda I_{n\times n})^t = M^t - \lambda I_{n\times n}$ gilt, folgt

$$\det(M - \lambda I_{n\times n}) = \det\left((M - \lambda I_{n\times n})^t\right) = \det(M^t - \lambda I_{n\times n})$$

Somit haben F und F^* die gleiche charakteristische Funktion, also die gleichen Eigenwerte.

Zu Aufgabe 12 (4 P) Es ist

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda I_{3\times 3}) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ -18 & 3-\lambda & -9 \\ 8 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot((-1-\lambda)(7-\lambda)+16) \\ &= (3-\lambda)\cdot(\lambda-3)^2 = (3-\lambda)^3.[1P]\end{aligned}$$

Also ist 3 der einzige Eigenwert von M. Eine Basis von

$$\operatorname{Eig}(M,3) = \operatorname{Ker}(M - 3I_{3\times 3})$$

findet sich durch Lösen des durch $(M - 3I_{3\times 3})$ gegebenen linearen Gleichungssystems ([1 P]):

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -18 & 0 & -9 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Dimension des Eigenraums ist also 2 und

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ist eine Basis von $\operatorname{Eig}(M,3)$ [1 P]. Damit ist M nicht diagonalisierbar [1 P].

Zu Aufgabe 13 (4 P) [2 P] Ist für jedes $i \in I$ die Familie $(w_j^{(i)})_{j\in J_i}$ eine Basis von W_i, dann ist die Familie $(w_j^{(i)})_{(i,j)\in(\cup_{\iota\in I}\{\iota\}\times J_\iota)}$ ein Erzeugendensystem von V, da wegen $V = \oplus W_i$ jedes $v \in V$ als endliche Summe von Elementen der einzelnen W_i's geschrieben werden kann. Sei $N \subset (\cup_{\iota\in I}\{\iota\}\times J_\iota)$ eine endliche Teilmenge,

$$0 = \sum_{(i,j)\in N} \lambda_{i,j} w_j^{(i)}$$

und für $r \in I$ sei $N_r \subset N$ die Teilmenge der Indizes aus N für die $w_j^{(i)} \in W_r$ ist. Dann folgt für jedes $r \in I$

$$\sum_{(i,j)\in N_r} -\lambda_{i,j} w_j^{(i)} = \sum_{(i,j)\in N\setminus N_r} \lambda_{i,j} w_j^{(i)},$$

aber dieses Element liegt im Schnitt von W_r und $\mathrm{span}(\cup_{i\neq r} W_i)$ und ist daher gleich Null. Nach Annahme ist dann $\lambda_{i,j} = 0$ für alle (i,j) aus N_r (für jedes $r \in I$). Daher ist die Familie $(w_j^{(i)})_{(i,j)\in(\cup_{\iota\in I}\{\iota\}\times J_\iota)}$ linear unabhängig und somit eine Basis.
[2 P] Ist umgekehrt die Familie $(w_j^{(i)})_{(i,j)\in(\cup_{\iota\in I}\{\iota\}\times J_\iota)}$ eine Basis von V, dann ist jede der Teilfamilien $(w_j^{(i)})_{j\in J_i}$ linear unabhängig. Sei $w \in W_i$ und $N \subset (\cup_{\iota\in I}\{\iota\}\times J_\iota)$ eine endliche Teilmenge, so dass

$$w = \sum_{(i,j)\in N} \lambda_{i,j} w_j^{(i)}$$

für geeignete Koeffizienten $\lambda_{i,j}$ gilt. Für jedes $r \neq i$ sei $N_r \subset N$ die Teilmenge der (i,j) mit $w_j^{(i)} \in W_r$. Aus

$$w - \sum_{(i,j)\in N_s, s\neq r} \lambda_{i,j} w_j^{(i)} = \sum_{(i,j)\in N_r} \lambda_{i,j} w_j^{(i)}$$

und der Direktheit der Summe folgt dann, dass $\sum_{(i,j)\in N_r} \lambda_{i,j} w_j^{(i)} = 0$ gilt. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit sind alle $\lambda_{i,j}$, für $(i,j) \in N_r$ und jedes $r \in I \setminus \{i\}$, gleich 0 und damit wird W_i von der Familie $(w_j^{(i)})_{j\in J_i}$ erzeugt.

Zu Aufgabe 14 (2 P)

$$f = (2X^3 + 0X^2 + 1X + 5) \cdot g + 4$$

Zu Aufgabe 15 (4 P) Es ist

$$\begin{aligned}\Delta(X^nY^m) &= X\delta_X(X^nY^m) + Y\delta_Y(X^nY^m) \\ &= X \cdot n \cdot X^{n-1}Y^m + Y \cdot m \cdot X^nY^m \\ &= (n+m)X^nY^m.\end{aligned}$$

Also ist jedes Monom $X^n Y^m$ ein Eigenvektor von Δ, dessen zugehöriger Eigenwert durch den sogenannten *Totalgrad* $n+m$ des Monoms gegeben ist [1 P]. Die Menge der Eigenwerte von Δ ist folglich gleich $\mathbb{N}$. Ein Polynom heißt homogen vom Grad n, wenn es eine Linearkombination von Monomen des Totalgrads n ist. Man sieht:

$$\mathrm{Eig}(\Delta, n) = \{\text{homogene Polynome vom Grad } n\}\,.$$

Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Euler über homogene Funktionen.

Da die Monome eine Basis von $K[X,Y]$ bilden und Δ damit diagonalisierbar ist [1 P], erhält man als Eigenraumzerlegung [1 P]

$$K[X,Y] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \{\text{homogene Polynome vom Grad } n\}\,.$$

[1 P] Für $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bleiben alle Monome $X^n Y^m$ Eigenvektoren von Δ, wobei der jeweils zugehörige Eigenwert $[n+m] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sich nun durch den Totalgrad modulo p ergibt. Der Endomorphismus Δ ist somit weiterhin diagonalisierbar. Es gibt nur noch endlich viele, aber dafür nun stets unendlich-dimensionale Eigenräume. Für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt

$$\mathrm{Eig}(\Delta, \lambda) = \mathrm{span}\,\{X^n Y^m \mid n, m \in \mathbb{N}, [n+m] = \lambda\}\,.$$