Lösungshinweise zum Übungsblatt # 2
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. (1 P) Nein, man nehme z.B. $-\mathrm{Id}$ und $v = e_1$, $w = e_2$.
2. (1 P) Nein, da 0 ein Eigenwert genau dann ist, wenn $Av = 0$ für ein $v \neq 0$, d.h. A ist nicht injektiv und damit nicht invertierbar.
3. (1 P) Nein, da $Av = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda v$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. (1 P) Ja, da $\dim \ker(A - 2\mathrm{Id}) = 1$.

Zu Aufgabe 5 (2 P)

1. (1 P)
$$\begin{aligned}
v \times (w \times u) &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_2u_3 - u_2w_3 \\ w_3u_1 - w_1u_3 \\ w_1u_2 - u_1w_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_2w_1u_2 - v_2u_1w_2 - v_3w_3u_1 + v_3w_1u_3 \\ v_3w_2u_3 - v_3u_2w_3 - v_1w_1u_2 + v_1u_1w_2 \\ v_1w_3u_1 - v_1w_1u_3 - v_2w_2u_3 + v_2u_2w_3 \end{pmatrix} \\
&= (v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} - (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\
&= (v, u)w - (v, w)u.
\end{aligned}$$
2. (1 P) Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ: z.B. gilt $e_1 \times (e_2 \times e_2) = 0$, aber $(e_1 \times e_2) \times e_2 = -e_1 \neq 0$.

Zu Aufgabe 6 (6 P)

1. (1 P) "$\Leftarrow$" Wir haben $H' = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (N', v) = r'\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda N, v) = \lambda(N, v) = \lambda r\} = H$.

   (2 P) "$\Rightarrow$" Seien $H = p + U$ und $H' = p' + U'$. Da $H = H'$, gilt $U = U'$, denn sei $u \in U$, dann ist $u + p = p' + u'$ für ein $u' \in U'$. Aber wir haben auch $p = p' + u''$ mit $u'' \in U'$, und damit $u = u' + p' - p = u' - u'' \in U'$. Folglich gilt $U \subset U'$. Analog zeigt man, dass $U' \subset U$.

Es ist klar, dass N die Normale zu U ist ($r = (N, p)$, $r' = (N', p')$). Da N' die Normale zu $U' = U$ ist, sind damit N und N' linear abhängig. Da beide Vektoren nicht gleich Null sind, ist $N = \lambda N'$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Damit folgt

$$r' = (N', p') = (\lambda N, p + u) = \lambda(N, p) + \lambda(N, u) = \lambda r,$$

wo wir benutzt haben, dass $(N, u) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

2. (3 P) Es ist klar, dass $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Andererseits gilt: $N' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $N'' = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (dies ist jeweils das Kreuzprodukt der Basiselemente von U' bzw. U''). Damit ist $r' = -7$ und $r'' = -6$.

   Man sieht leicht, dass $H = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ mit $U = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$, und damit ist $r = (N, p) = 2$. Teil 1. zeigt, dass $H = H''$, aber $H \neq H'$.

Zu Aufgabe 7 (4 P)

1. (1 P) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K), \lambda \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (A + B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + B_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} \\ &= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B). \end{aligned}$$

   (1 P) Die Gleichheit $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$ folgt analog.

2. (1 P) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = (AB)_{11} + \cdots + (AB)_{nn} \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_{1j} B_{j1} + \sum_{j=1}^{n} A_{2j} B_{j2} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} A_{nj} B_{jn} \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_{1k} A_{k1} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} B_{nk} A_{kn} \\ &= (BA)_{11} + \cdots + (BA)_{nn} = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \mathrm{tr}(BA). \end{aligned}$$

3. (1 P) Aus der vorherigen Teilaufgabe folgt, dass $\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(S^{-1}SA) = \mathrm{tr}(A)$ für eine beliebige invertierbare Matrix S und eine beliebige Matrix

A gilt. Da A diagonalisierbar ist, existiert ein S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Diagonale ist, woraus die Behauptung sofort folgt.

Zu Aufgabe 8 (4 P)

a) (2 P) Die Populationsentwicklung unseres Waldes wird durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben, d.h.

$$\begin{pmatrix} h(t+1) \\ f(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Rechnen zeigt, dass A die Eigenwerte 2 und 3 hat, mit Eigenvektoren $(1,1)$ bzw. $(2,1)$.

(1 P) Damit gilt $h(t) = 100 \cdot 2^t$ und $f(t) = 100 \cdot 2^t$.

b) (1 P) Es gilt $(6,5) = 4 \cdot (1,1) + (2,1)$ und damit ist $h(t) = 400 \cdot 2^t + 200 \cdot 3^t$, $f(t) = 400 \cdot 2^t + 100 \cdot 3^t$.

Zu Aufgabe 9 (4 P)
Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von FG mit Eigenvektor v. Dann gilt $GFGv = \lambda Gv$. Da nach Annahme $Gv \neq 0$, ist λ auch ein Eigenwert von GF mit Eigenvektor Gv. Analog zeigt man, dass jeder Eigenwert $\mu \neq 0$ von GF auch ein Eigenwert von FG ist.
Es bleibt zu zeigen, dass 0 ein Eigenwert von FG ist genau dann, wenn 0 ein Eigenwert von GF ist. Aber es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \text{ Eigenwert von } FG &\iff \ker(FG) \neq \{0\} \\ &\iff 0 = \det(FG) = \det(GF) \\ &\iff 0 \text{ Eigenwert von } GF. \end{aligned}$$