# Lösungshinweise zum Übungsblatt # 1
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

---

**Zu den kurzen Fragen** (3 P)

1. (1 P) Nein, da $K^n$ ansonsten mindestens $m$ linear unabhängige Elemente besitzen würde.
2. (1 P) Ja, da die beiden ja schon einzeln erzeugen.
3. (1 P) Nein, $f = \mathrm{id}$, $g = -\mathrm{id}$ ist ein einfaches Gegenbeispiel.

**Zu Aufgabe 1** (5 P)

1. (2 P) Wir wissen, dass das Gaußverfahren uns Lösungen $x_i$ für die Gleichungen $Ax_i = e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ liefert. Schreibt man die $x_i$ spaltenweise in eine Matrix $B$, ist es klar, dass $AB = \mathrm{Id}$ die Einheitsmatrix ist. Weil $A$ invertierbar ist, gilt damit $B = A^{-1}$. Diese Matrix ist jedoch genau die Matrix, die beim obigen Verfahren hinten entsteht.

   (1 P) Wenn $A$ nicht invertierbar ist, dann ist mindestens für ein $i$ die Gleichung $Ax = e_i$ nicht lösbar, so dass wir vorne niemals die Einheitsmatrix erreichen können.

2. (2 P) Die Inverse der ersten Matrix ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Die Matrix $B$ hat Rang 2 und ist damit nicht invertierbar.

**Zu Aufgabe 2** (3 P)

1. (1 P) Bezeichne die Elemente von $\mathcal{C}$ durch $c_i$, $i = 0, \ldots, 3$. Ist $\sum \alpha_i c_i = 0$, so folgt aus Gradgründen, dass $\alpha_3 = 0$ und induktiv, dass alle $\alpha_i$ Null sind. Damit sind die Elemente von $\mathcal{C}$ eine maximal linear unabhängige Teilmenge.

2. (1 P) Direktes Rechnen gibt
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (1 P) Es gilt
$$T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Zu Aufgabe 3** (6 P) Seien im Folgenden $w, w' \in V$ beliebig.

(1) (1 P) Die Abbildung $s_v$ ist die Summe der Abbildungen id und $-2\frac{(v,-)}{(v,v)}v$, welche beide linear sind.

(2) (1 P) Zunächst einmal gilt: $s_v(v) = v - 2\frac{(v,v)}{(v,v)}v = -v$. Nach Definition ist $v' \in (\mathbb{R}v)^\perp$ genau dann, wenn $(v, v') = 0$ ist. Daraus folgt sofort, dass $s_v(v') = v'$ ist.

(3) (1 P) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}(s_v(w), s_v(w')) &= (w - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}v, w' - 2\frac{(v,w')}{(v,v)}v)\\ &= (w,w') - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}(v,w') - 2\frac{(v,w')}{(v,v)}(w,v) +\\ &+ 4\frac{(v,w)}{(v,v)}\frac{(v,w')}{(v,v)}(v,v)\\ &= (w,w').\end{aligned}$$

Insbesondere ist $s_v$ injektiv und damit automatisch surjektiv, da $\dim V < \infty$ ist.

(4) (1 P) Es gilt:

$$\begin{aligned}s_v^2(w) = s_v(s_v(w)) = s_v(w - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}v) &= s_v(w) - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}s_v(v)\\ = w - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}v - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}s_v(v)&\\ = w - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}v + 2\frac{(v,w)}{(v,v)}v = w,&\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt (2) benutzt haben.

(5) (2 P) Es gilt $V = (\mathbb{R}v) \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$. Man wähle eine Basis $\mathcal{B} = \{v, v_1, \ldots, v_k\}$ von $V$, wobei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Basis von $(\mathbb{R}v)^\perp$ ist. Nach Teil 2. ist $M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(s_v)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $(-1, 1, \ldots, 1)$, so dass $\det(s_v) = -1$.

**Zu Aufgabe 4** (7 P)

1. (2 P) Nach der Wahl einer Basis können wir $V$ mit $K^n$ identifizieren und somit Elemente von $V$ als $n$-Tupel mit Einträgen aus $K$ ansehen. In jedem Eintrag gibt es $q$ Möglichkeiten, und damit insgesamt $q^n$ Elemente in $V$.

2. (1 P) Jedes Element außer der 0 in $V \cong K$ ist eine Basis und davon gibt es $q - 1$ Stück.

3. (1 P) Wir können die geordneten Basen wie folgt abzählen: Der erste Vektor ist frei wählbar (aber $\neq 0$) und dafür haben wir $q^2 - 1$ Möglichkeiten. Der zweite Vektor darf nicht linear abhängig vom ersten sein, also nicht im $q$-elementigen Unterraum liegen, der vom ersten erzeugt ist.

4. (2 P) Der erste Vektor ist frei wählbar, also gibt es $q^n - 1$ Möglichkeiten. Der zweite darf kein Vielfaches des ersten sein, also gibt es dafür $q^n - q$ Möglichkeiten; für den dritten dann $q^n - q^2$ usw. Damit erhalten wir für die Anzahl $\mathrm{Anz}(n)$ geordneter Basen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Anz}(n) &= (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1}) \\
&= (q^n - 1)q(q^{n-1} - 1)q^2(q^{n-2} - 1) \cdots q^{n-1}(q - 1) \\
&= q^{1+\cdots+(n-1)}(q^n - 1) \cdots (q - 1) \\
&= q^{n(n-1)/2}(q - 1)(q^2 - 1) \cdots (q^n - 1).
\end{aligned}$$

5. (1 P) Die Spalten einer invertierbaren Matrix sind eine geordnete Basis und jede geordnete Basis gibt eine invertierbare Matrix. Somit folgt dieser Teil aus dem vorherigen.