Pfingstblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Aufgabe P1 (7 P) Sei R ein Integritätsbereich. Wir betrachten die Menge $\mathrm{Quot}(R) := \big(R \times (R \setminus \{0\})\big)/\sim$ mit der Äquivalenzrelation

$$(r, s) \sim (r', s') \Longleftrightarrow rs' = r's.$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen $[(r, s)]$ mit $\frac{r}{s}$. Also $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \Leftrightarrow rs' = r's$. Weiterhin definieren wir

$$\frac{r}{s} + \frac{t}{u} = \frac{ru + st}{su}, \qquad \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u} = \frac{rt}{su}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Relation „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.
2. Die Operationen “$+$” und “$\cdot$” hängen nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.
3. $(\mathrm{Quot}(R), +)$ ist eine abelsche Gruppe.
4. $(\mathrm{Quot}(R) \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.
5. $(\mathrm{Quot}(R), +, \cdot)$ ist ein Körper.
6. Es existiert ein injektiver Ringhomomorphismus $R \to \mathrm{Quot}(R)$.

Bemerkung: Man nennt $\mathrm{Quot}(R)$ den *Quotientenkörper* von R. Zum Beispiel ist $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ und der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathrm{Quot}(K[X]) =: K(X)$ (K beliebiger Körper) ist der Körper der *rationalen Funktionen*, dessen Elemente Quotienten von Polynomen sind, wobei der Nenner nicht das Nullpolynom sein darf.

Aufgabe P2 (6 P) Sei V der unendlich-dimensionale Vektorraum aller reellen Folgen $(a_1, a_2, \ldots)$ und sei $f(a_1, a_2, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$.

1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von f.
2. Betrachten Sie den Untervektorraum $W = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$. Zeigen Sie, dass $\dim(W) = 2$, indem Sie eine Basis von W bestehend aus Eigenvektoren zu f angeben. Was sind die zugehörigen Eigenwerte?
3. Sei $(a_1, a_2, \ldots)$ die *Fibonacci-Folge*, d.h. die Folge mit $a_1 = a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$. Berechnen Sie eine explizite (eine nicht-rekursive) Formel für a_n.

Aufgabe P3 (2 P) Sei $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Zeigen Sie, dass ein Untervektorraum $U \subseteq \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ mit $\dim_K U = n$ existiert, so dass $M^k \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe P4 (5 P) Sei K ein Körper der Charakteristik 0, V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent. Wir definieren

$$\exp(f) := \sum_{i=0}^{L} \frac{1}{i!} f^i \in \mathrm{End}_K(V)$$

mit L groß genug, so dass $f^L = 0$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Sind f und g nilpotente Endomorphismen mit $fg = gf$, dann ist $f + g$ auch nilpotent.
2. Sind f und g nilpotente Endomorphismen mit $fg = gf$, dann gilt:
$$\exp(f + g) = \exp(f) \exp(g).$$
3. Es existieren nilpotente Endomorphismen f, g, so dass $f + g$ nilpotent ist, jedoch $\exp(f + g) \neq \exp(f) \exp(g)$.

Aufgabe P5 (4 P) Sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension n und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f^n = 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Es existiert ein Vektor $v \in V$ so, dass $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ eine Basis von V ist.
2. $\dim_K(\ker(f)) = 1$.