Übungsblatt # 12
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Was ist $\dim_K \mathrm{Bil}(K^n)$?
2. Warum sind symmetrische Sesquilinearformen automatisch 0?
3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\mathrm{char}(K) = 2$, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$. Welche Bedingungen an die Matrix $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\beta)$ sind äquivalent dazu, dass β antisymmetrisch ist?
4. (Details zu 6.2, Bem. 8) Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, sowie $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen in V. Weiter sei β eine Sesquilinarform auf V, sowie

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{ses}}(\beta), \quad N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ses}}(\beta) \quad \text{und} \quad T = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Warum gilt $N = T^{\mathrm{ad}} M T$?

Aufgabe 62 (3 P) (Beweis von 6.2, Lemma 5) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ und $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{bi}}(\beta)$. Zeigen Sie:

1. β symmetrisch $\iff M = M^T$,
2. β nicht-entartet $\iff M$ hat vollen Rang.

Aufgabe 63 (2 P) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass eine antisymmetrische Bilinearform über einem K-Vektorraum V von ungerader, endlicher Dimension immer entartet ist.

Aufgabe 64 (3 P) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter sei β eine positiv semi-definite symmetrische Bilinearform (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Wir setzen

$$V^{\perp} := \{x \in V : \beta(x, v) = 0 \text{ für alle } v \in V\} \ .$$

Zeigen Sie, dass β auf $V/V^{\perp}$ ein Skalarprodukt induziert.

Aufgabe 65 (4 P) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, und sei β wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \beta\colon V \times V &\to \mathbb{R}, \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &\mapsto 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass β ein Skalarprodukt ist, und bestimmen Sie eine bezüglich dieses Skalarprodukts orthonormierte Basis.

Aufgabe 66 (3 P) Seien β_1 und β_2 Skalarprodukte eines unitären Vektorraums V. Zeigen Sie die Implikation

$$\big(\forall v \in V : \beta_1(v,v) = \beta_2(v,v)\big) \implies \beta_1 = \beta_2.$$

Aufgabe 67 (2 P) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\beta(x,y) = \overline{x}^T Ay$ genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ definiert, wenn ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ mit $A = S^{\mathrm{ad}}S$ existiert. (Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ steht S^{ad} für S^T.)

Aufgabe 68 (3 P) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Sei $S \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eine Teilmenge, so dass $\{0\}$ und V die einzigen Unterräume sind, die gleichzeitig für alle $f \in S$ invariant sind. D.h. für jeden Untervektorraum $U \subset V$ gilt:

$$(\forall f \in S : fU \subset U) \;\Rightarrow\; U = \{0\} \vee U = V \ .$$

Zeigen Sie, dass nur Vielfache der Identität mit allen Elementen aus S vertauschen, d.h. zeigen Sie, dass für jedes $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gilt:

$$(\forall f \in S : fh = hf) \;\Rightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{C} : h = \lambda\, id \ .$$