Übungsblatt # 7
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Ist jeder Unterring von $\mathbb{Z}$ auch ein Ideal in $\mathbb{Z}$?
2. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $s \in R$. Warum gilt dann $\langle s \rangle = \{rs \mid r \in R\}$?
3. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien $p, q \in R$. Betrachte das Produktideal $\langle p \rangle \cdot \langle q \rangle$ (vgl. Bem. 5.1.13) der Hauptideale $\langle p \rangle$ und $\langle q \rangle$.
   (a) Warum gilt $\langle pq \rangle \subset \langle p \rangle \cdot \langle q \rangle$?
   (b) Warum gilt $\langle pq \rangle \supset \langle p \rangle \cdot \langle q \rangle$?

   (Insgesamt haben wir damit gezeigt: $\langle pq \rangle = \langle p \rangle \cdot \langle q \rangle$.)

Aufgabe 33 (4 P) Sei K ein Körper, T der Unterring der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und T^+ die Teilmenge der echten oberen Dreiecksmatrizen (vgl. Bsp. 4) nach Def. 5.1.1). Zeigen Sie: T^+ ist ein Ideal in T, und der Quotientenring T/T^+ ist isomorph (als Ring) zu K^n.

Aufgabe 34 (3 P) Sei $f\colon K \to S$ ein Ringhomomorphismus, wobei K ein Körper und $S \neq \{0\}$ ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring mit 1 ist.

1. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
2. Zeigen Sie, dass f die Struktur eines K-Vektorraums auf S induziert.

Aufgabe 35 (4 P) Sei K ein Körper und $p \in K[X]$.

1. Zeigen Sie, dass der Quotientenring $K[X]/\langle p \rangle$ ein K-Vektorraum ist.
2. Sei $p \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\dim_K(K[X]/\langle p \rangle) = \deg(p)\,.$$

Aufgabe 36 (4 P)

1. Zeigen Sie, dass ein Polynom $p \in K[X]$ (K ein Körper) vom Grad 1 irreduzibel ist.
2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel: Für jeden Körper K und jedes $p \in K[X]$ gilt:
   a) Sei $\deg(p) = 2$. Hat p keine Nullstelle, so ist p irreduzibel.
   b) Sei $\deg(p) = 3$. Hat p keine Nullstelle, so ist p irreduzibel.
   c) Sei $\deg(p) = 4$. Hat p keine Nullstelle, so ist p irreduzibel.

Aufgabe 37 (5 P)

1. Die komplexe Konjugation $\overline{(\ )} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch $\overline{a + ib} = a - ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ ist, der $\mathbb{R}$ punktweise fix lässt.
2. Sei $p \in \mathbb{R}[X]$. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p, so auch das komplex Konjugierte $\overline{z} \in \mathbb{C}$.
3. Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ Grad 1 oder 2 haben.
4. Klassifizieren Sie alle irreduziblen Polynome $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad 2.

Hinweis: Sie können den Fundamentalsatz der Algebra (vgl. Satz 4.4.11) benutzen.