Übungsblatt # 6
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei V ein K-Vektorraum und $M \in \mathrm{End}_K(V)$. Warum ist der Schnitt von zwei M-invarianten Unterräumen wieder M-invariant?

2. Sei $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Warum ist $U = \mathrm{span}\{v, Mv\}$ ein M-invarianter Unterraum für jeden Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^4$?

3. Sind $0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = V$ und $0 \subsetneq W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq W_m = W$ Fahnen, können Sie dann auch eine Fahne von $V \oplus W$ konstruieren?

4. Warum gibt es in einem Körper nur die trivialen Ideale, nämlich das Nullideal und den Körper selbst?

Aufgabe 28 (5 P) Triagonalisieren Sie die folgende Matrix $M \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, d.h. geben Sie eine Matrix S an, so dass SMS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29 (3 P) Bestimmen Sie die Haupträume der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 30 (2 P)

1. Sei $M \in \mathrm{O}(n)$. Zeigen Sie, dass für einen M-invarianten Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ der Unterraum $U^\perp$ ebenfalls M-invariant ist.

2. Zeigen Sie, dass M aus der kurzen Frage 2 keinen drei-dimensionalen invarianten Unterraum hat.

Aufgabe 31 (7 P) Sei V ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Die Abbildung f heißt *nilpotent*, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^k = 0$. Wir können damit insbesondere über nilpotente Matrizen sprechen.

1. Welche Eigenwerte kann ein nilpotenter Endomorphismus haben?
2. Sei $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   a) M ist nilpotent.
   b) M ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen.
3. Beschreiben Sie alle Äquivalenzklassen nilpotenter 2×2-Matrizen über einem Körper K bzgl. der Ähnlichkeit-Äquivalenzrelation. Geben Sie dazu jeweils genau einen Repräsentanten per Äquivalenzklasse an.

Aufgabe 32 (3 P) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein Ideal $I \subsetneq R$ heißt *prim*, wenn aus $xy \in I$ schon folgt, dass $x \in I$ oder $y \in I$ ist. Ein Ideal $I \subsetneq R$ heißt *maximal*, wenn aus $I \subseteq J \subsetneq R$, wobei J ein weiteres Ideal ist, schon folgt, dass $I = J$.

1. Zeigen Sie, dass I prim ist genau dann, wenn R/I keine Nullteiler hat.
2. Sei in R überdies $1 \neq 0$, und $\{0\}$ und R seien die einzigen Ideale von R. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.
3. Zeigen Sie, dass I maximal ist genau dann, wenn R/I ein Körper ist.